P.E. DANKO

EXERCICES ET PROBLÈMES DES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

1

AVANT-PROPOS

Les deux volumes du présent ouvrage sont conçus en tant que guide pratique facilitant la résolution des problèmes de mathématiques qui pourraient intéresser les étudiants des écoles techniques supérieures.

Les auteurs se sont proposés d'expliciter le cours de mathématiques supérieures à l'aide des exercices et des problèmes soigneusement choisis dont une bonne partie est accompagnée de solutions détaillées.

Chaque paragraphe est précédé d'un cours résumé théorique comportant les définitions et les notions essentielles relatives aux problèmes qui suivent.

Nous espérons que les étudiants des écoles techniques supérieures de France, de même que toutes les personnes désireuses de compléter leurs connaissances dans le domaine des mathématiques, trouvent la lecture de ce livre utile et agréable.

Les auteurs

P. DANKO ET A. POPOV

EXERCICES ET PROBLÈMES DES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

Partie I

EDITIONS MIR • MOSCOU • 1977

CHAPITRE PREMIER

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

§ 1. Coordonnées rectangulaires et polaires

1. Coordonnées sur une droite. On désigne par $M(x)$ un point M d'abscisse x situé sur l'axe de coordonnées Ox.

La distance d de deux points $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$, indifféremment de la position qu'ils occupent sur l'axe, est donnée par la formule

$$d = |x_2 - x_1|.$$

Division d'un segment dans un rapport donné. Un segment AB d'origine A et d'extrémité B situé sur une droite quelconque est divisé par tout troisième point C de cette droite dans un certain rapport λ, où

$$\lambda = \pm\frac{AC}{CB}.$$

Si les segments AC et CB sont dirigés dans le même sens, λ prend le signe « + », tandis que dans le cas contraire, le signe du rapport est « — ». Autrement dit, λ est positif lorsque le point C se trouve entre les points A et B, mais il est négatif dans le cas où le point C se situe sur la droite en dehors du segment AB.

Si les points A et B se trouvent sur l'axe Ox, la *coordonnée x du point C* (x), *qui divise dans le rapport* λ le segment déterminé par les points $A(x_1)$ et $B(x_2)$ est donnée par la formule:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

En particulier, pour $\lambda = 1$, la formule susmentionnée permet de calculer la *coordonnée du point milieu du segment AB*:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

1. Construire sur une droite les points $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(\sqrt{2})$, $E\left(-3\frac{1}{2}\right)$.

2. Quatre points divisent le segment AB en 5 parties égales. Trouver la coordonnée du point de division le plus proche du point A si $A(-3)$, $B(7)$.

Solution. Soit $C(\bar{x})$ le point cherché. Alors $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{4}$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{4}\cdot 7}{1 + \frac{1}{4}} = -1, \text{ c'est-à-dire } C(-1).$$

3. On donne les extrémités A (1) et B (5) du segment AB. En dehors de ce segment et sur la même droite se situe le point C dont la distance au point A vaut trois fois sa distance au point B. Déterminer la coordonnée du point C.

Solution. Il est aisé de voir que $\lambda = -\frac{AC}{BC} = -3$ (on recommande au lecteur de faire le dessin respectif).

De cette façon, $\bar{x} = \frac{1-3\cdot 5}{1-3} = 7$, c'est-à-dire C (7).

4. Construire sur un axe numérique les points $A(-6)$, $B\left(\frac{2}{3}\right)$, $C(-0{,}5)$, $D(\sqrt{3})$, $E\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5. Trouver la distance des points M (3) et N (—5).

Réponse. $d = 8$.

6. Trouver la distance des points $P\left(-5\frac{1}{2}\right)$ et $Q\left(-2\frac{1}{2}\right)$.

Réponse. $d = 3$.

7. Deux points divisent le segment AB en 3 parties égales. Déterminer les coordonnées des points de division si A (—1), B (5).

Réponse. C (1), D (3).

8. On donne les points A (—7), B (—3). En dehors du segment AB sont situés les points C et D tels que $CA = BD = \frac{AB}{2}$. Trouver les coordonnées des points C et D.

Réponse. C (—9), D (—1).

2. Coordonnées rectangulaires dans le plan. Problèmes élémentaires. Si l'on choisit dans un plan un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires xOy, un point M de coordonnées x et y situé dans ce plan est désigné par $M(x; y)$.

La distance d des points $M_1(x_1; y_1)$ et $M_2(x_2; y_2)$ est donnée par la formule

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

En particulier, la *distance d du point $M(x; y)$ à l'origine des coordonnées* est déterminée par la formule

$$d = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Les *coordonnées du point $C(x; y)$ qui divise dans le rapport donné λ* (voir p. 1) le segment $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ sont données par les formules:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

En particulier, pour $\lambda = 1$, on obtient les formules des coordonnées du point milieu du segment AB

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

L'*aire d'un triangle* de sommets $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ est donnée par la formule

$$S = \frac{1}{2} \left| x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) \right| =$$
$$= \frac{1}{2} \left| (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right|.$$

La formule de l'aire d'un triangle peut s'écrire

$$S = \frac{1}{2} |\Delta|,$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

(la notion de déterminant d'ordre 3 est donnée au paragraphe 5 du présent chapitre).

9. Construire dans le plan de coordonnées les points $A(4; 3)$, $B(-2; 5)$, $C(5; -2)$, $D(-4; -3)$, $E(-6; 0)$, $F(0; 4)$.

10. Trouver la distance des points $A(3; 8)$ et $B(-5; 14)$.

Solution. En appliquant la formule $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, on obtient

$$d = \sqrt{(-5-3)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

11. Montrer que le triangle ABC de sommets $A(-3; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(11; -1)$ est rectangle.

Solution. Trouvons les mesures des côtés du triangle :

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$
$$BC = \sqrt{(11+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$
$$AC = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Vu que $AB^2 = 40$, $BC^2 = 160$, $AC^2 = 200$, on a $AB^2 + BC^2 = AC^2$. On voit de cette façon que la somme des carrés de deux côtés du triangle est égale au carré de son troisième côté, d'où vient que le triangle ABC est un triangle rectangle d'hypoténuse AC.

12. On donne les extrémités du segment AB: $A(-2; 5)$, $B(4; 17)$. Le point C situé sur le segment donné divise ce dernier de façon que sa distance au point A est deux fois supérieure à sa distance au point B. Déterminer les coordonnées du point C.

Solution. Etant donné que $AC = 2CB$, on a $\lambda = \frac{AC}{CB} = 2$. Ici $x_1 = -2$, $y_1 = 5$, $x_2 = 4$, $y_2 = 17$. Par conséquent,

$$\bar{x} = \frac{-2+2\cdot 4}{1+2} = 2, \quad \bar{y} = \frac{5+2\cdot 17}{1+2} = 13, \text{ c'est-à-dire } C(2; 13).$$

13. Le point C (2; 3) est le point milieu du segment AB. Déterminer les coordonnées du point A si B (7; 5).

Solution. Ici $\bar{x}=2$, $\bar{y}=3$, $x_2=7$, $y_2=5$, d'où $2=\frac{x_1+7}{2}$, $3=\frac{y_1+5}{2}$. Donc, $x_1=-3$, $y_1=1$, c'est-à-dire $A(-3;\ 1)$.

14. On donne les sommets du triangle ABC : A $(x_1;\ y_1)$, B $(x_2;\ y_2)$, C $(x_3;\ y_3)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des médianes du triangle.

Solution. On trouve les coordonnées du point D situé au milieu du segment AB:

$$x_D=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_D=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Désignons par M le point d'intersection des médianes. On sait que ce point divise le segment CD dans le rapport 2 : 1 en partant du point C. Il s'ensuit que les coordonnées du point M sont données par les formules

$$\bar{x}=\frac{x_3+2\cdot x_D}{1+2},\quad \bar{y}=\frac{y_3+2\cdot y_D}{1+2},$$

c'est-à-dire

$$\bar{x}=\frac{x_3+2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}}{3},\quad \bar{y}=\frac{y_3+2\,\frac{y_1+y_2}{2}}{3}.$$

Finalement, on a

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

15. Déterminer l'aire du triangle dont les sommets sont représentés par les points A $(-2;\ -4)$, B $(2;\ 8)$, C $(10;\ 2)$.

Solution. En appliquant la formule de l'aire d'un triangle, on a

$$S=\frac{1}{2}\cdot|(2+2)(2+4)-(10+2)(8+4)|=\frac{1}{2}|24-144|=60.$$

16. Construire dans le plan de coordonnées les points

$$A(1;\ \sqrt{2}),\ B\left(-2;\ -1\frac{1}{2}\right),\ C(-\sqrt{3};\ 0),\ D\left(0;\ 2\frac{2}{3}\right).$$

17. Déterminer la distance des points:

a) A (2; 3) et B (−10; −2);

b) $A(\sqrt{2};\ -\sqrt{7})$ et $B(2\sqrt{2};\ 0)$.

Réponse. a) 13; b) 3.

18. Montrer que le triangle de sommets A (2; —1), B (4; 2), C (5; 1) est isocèle.

19. On donne les sommets d'un triangle : A (—1; —1), B (0; —6), C (—10; —2). Trouver la longueur de la médiane menée du sommet A.

Réponse. 5.

20. On donne les extrémités du segment AB : A (—3; 7), B (5; 11) Trois points divisent le segment donné en quatre parties égales. Déterminer les coordonnées des points de division.

Réponse. (—1; 8), (1; 9), (3; 10).

21. Trouver l'aire du triangle dont les sommets se situent aux points A (1; 5), B (2; 7), C (4; 11).

Réponse. $S = 0$, ce qui signifie que les points A, B, C se trouvent sur la même droite.

22. On donne trois sommets successifs d'un parallélogramme : A (11; 4), B (—1; —1), C (5; 7). Déterminer les coordonnées de son quatrième sommet.

Réponse. D (17; 12).

23. On donne deux sommets A (3; 8), B (10; 2) d'un triangle et le point d'intersection de ses médianes M (1; 1). Trouver les coordonnées de son troisième sommet.

Réponse. C (—10; —7).

24. On donne les sommets A (7; 2), B (1; 9), C (—8; —11) d'un triangle. Trouver les distances du point d'intersection des médianes aux sommets du triangle.

Réponse. $\sqrt{53}$, $\sqrt{82}$, $\sqrt{185}$.

25. Soient L (0; 0), M (3; 0), N (0; 4) les points milieux des côtés d'un triangle. Calculer l'aire de ce triangle.

Réponse. 24.

3. Coordonnées polaires. Dans le système de coordonnées polaires, la position d'un point M dans le plan est déterminée par sa distance $OM = \rho$ au pôle O (ρ est le rayon vecteur du point) et par l'angle θ que fait le segment OM avec l'axe polaire Ox (θ est l'angle polaire du point). L'angle θ est considéré positif s'il est compté à partir de l'axe polaire dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.

Si le point M est de coordonnées $\rho > 0$ et $\theta > 0$, où $0 \leqslant \theta < 2\pi$, on peut lui faire correspondre une infinité de couples de coordonnées polaires $(\rho;\ \theta + 2k\pi)$ et $[-\rho;\ \theta + (2k+1)\pi]$, où k est un entier arbitraire (positif ou négatif) ou zéro.

Si l'on fait coïncider l'origine du système de coordonnées cartésiennes rectangulaires avec le pôle et si l'on dirige l'axe Ox suivant l'axe polaire, les coordonnées rectangulaires x et y du point M et ses coordonnées polaires ρ et θ seront liées par les formules suivantes :

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta;$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

26. Construire les points donnés par les coordonnées polaires suivantes : $A\left(4;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2;\ \frac{4}{3}\pi\right)$, $C\left(3;\ -\frac{\pi}{6}\right)$, $D\left(-3;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $E(0;\ \alpha)$, $F\left(-1;\ -\frac{3}{4}\pi\right)$.

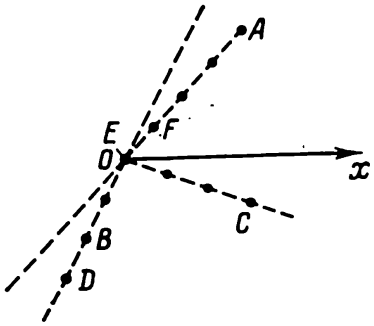


Fig. 1

Réponse. Voir fig. 1.

27. Trouver les coordonnées polaires du point $M\ (1;\ -\sqrt{3})$ si le pôle coïncide avec l'origine des coordonnées et si l'axe polaire est dirigé suivant le sens positif de l'axe des abscisses.

Solution. On a $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$. Les deux dernières égalités nous donnent $\theta = \frac{5}{3}\pi$ (lors de la recherche de l'angle θ, il est utile de prendre en considération que le point M se trouve dans le IVe quadrant). Donc, $M\left(2;\ \frac{5}{3}\pi\right)$.

28. Trouver les coordonnées rectangulaires du point $A\left(2\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$ déterminé en coordonnées polaires si le pôle coïncide avec l'origine des coordonnées et si l'axe polaire est dirigé suivant l'axe des abscisses.

Solution. On a $x = 2\sqrt{2}\cos\frac{3}{4}\pi = -2$; $y = 2\sqrt{2}\times \times \sin\frac{3}{4}\pi = 2$. Donc, $A\ (-2;\ 2)$.

29. Construire les points : $A\left(10;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2;\ \frac{5}{4}\pi\right)$, $C\left(0;\ \frac{\pi}{10}\right)$, $D\left(1;\ -\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(-1:\ \frac{\pi}{4}\right)$, $F\left(-1;\ -\frac{\pi}{4}\right)$.

30. On donne les coordonnées polaires du point $M\ \left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$. Trouver les coordonnées rectangulaires de ce point si l'origine des coordonnées coïncide avec le pôle et si l'axe Ox se confond avec l'axe polaire.

Réponse. $M\ (\sqrt{3};\ 1)$.

31. On donne les coordonnées polaires du point $M\left(3;\ \frac{2\pi}{3}\right)$. Trouver ses coordonnées cartésiennes.

Réponse. $M\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

32. Déterminer la distance des points $M_1\ (\rho_1;\ \theta_1)$, $M_2\ (\rho_2;\ \theta_2)$.

Indication. Appliquer le théorème des cosinus au triangle OM_1M_2.

Réponse. $d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$.

33. Déterminer la distance des points $M\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$, $N\left(4;\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

Réponse. 5.

34. Trouver les coordonnées polaires du point symétrique au point $M(\rho;\ \theta)$ par rapport à l'axe polaire.

Réponse. $M_1(\rho;\ -\theta)$.

35. Trouver les coordonnées polaires du point symétrique au point $M(\rho;\ \theta)$ par rapport au pôle.

Réponse. $M_1(\rho;\ \pi+\theta)$.

36. Trouver les coordonnées polaires du point symétrique au point $M(\rho;\ \theta)$ par rapport à la droite qui passe par le pôle étant perpendiculaire à l'axe polaire.

Réponse. $M_1(\rho;\ \pi-\theta)$.

4. Equation d'une ligne. A toute ligne du plan xOy, prise en tant que lieu géométrique des points, il correspond une certaine équation qui lie les coordonnées de n'importe quel point $M(x;\ y)$ (« point courant ») situé sur cette ligne. Une telle équation appelée *équation de la ligne donnée.*

En substituant dans l'équation de la ligne les coordonnées de tout point situé sur celle-ci, on obtient une identité (l'équation est satisfaite). Si l'on substitue dans l'équation de la ligne les coordonnées de n'importe quel point qui ne lui appartient pas, l'équation n'est pas satisfaite (on obtient une inégalité).

Ainsi, le point $A(2;\ 3)$ se trouve sur la ligne dont l'équation est $x^2+4x+y^2-21=0$ (c'est un cercle de rayon $r=5$ et de centre $C(-2;\ 0)$), mais ne se situe pas sur la droite $2x-y+5=0$; en effet, $2^2+4\cdot2+3^2-21=0$, tandis que $2\cdot2-3+5\neq0$.

37. L'une des extrémités d'un segment de longueur c se déplace suivant l'axe des abscisses, tandis que l'autre glisse sur l'axe des ordonnées. Trouver l'équation de la ligne décrite par le point milieu de ce segment.

Solution. Soit $M(x;\ y)$ le point milieu du segment. La longueur du segment OM (la longueur de la médiane) est égale à la moitié de l'hypoténuse, c'est-à-dire $OM=\frac{c}{2}$. D'autre part, $OM=\sqrt{x^2+y^2}$ (la distance du point M à l'origine des coordonnées).

On arrive de cette façon à l'équation $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{c}{2}$, ou $x^2+y^2=\frac{c^2}{4}$ qui est l'équation de la ligne cherchée.

Il est géométriquement évident que la ligne cherchée est un cercle de rayon $\frac{c}{2}$ dont le centre se situe à l'origine des coordonnées.

38. Former l'équation de la ligne dont chaque point se situe par rapport au point $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ à une distance égale à la distance de ce point à la droite $y = -\frac{1}{4}$.

S o l u t i o n. Prenons sur la ligne cherchée un point arbitraire $M(x; y)$. La distance des points M et F est donnée par la formule de la distance de deux points:

$$MF = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

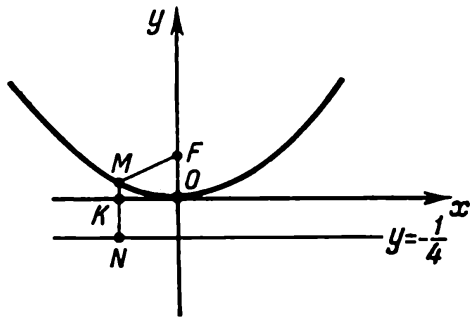


Fig. 2

La distance du point M à la droite $y = -\frac{1}{4}$ peut être trouvée en partant des simples considérations géométriques (fig. 2):

$$MN = MK + KN = y + \frac{1}{4}.$$

Vu que l'égalité $MF = MN$ doit être satisfaite pour tout point situé sur la ligne cherchée, on peut écrire l'équation de celle-ci sous la forme

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = y + \frac{1}{4}$$

ou

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16},$$

c'est-à-dire

$$y = x^2.$$

La ligne déterminée par l'équation $y = x^2$ est appelée *parabole*.

39. Former l'équation du lieu géométrique des points dont le produit des distances aux points $F_1(a; 0)$ et $F_2(-a; 0)$ a une valeur constante égale à a^2.

S o l u t i o n. Prenons sur la courbe cherchée un point arbitraire $M(x; y)$. Les distances de ce point aux points $F_1(a; 0)$ et $F_2(-a; 0)$ seront $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$. Suivant les conditions du problème

$$r_1 \cdot r_2 = a^2.$$

De cette façon, l'équation de la courbe cherchée sera

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2.$$

Mettons cette équation sous forme rationnelle:

$$(x^2 + a^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + a^2 + y^2 + 2ax) = a^4,$$

d'où

$$(x^2 + a^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4,$$

et finalement

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2).$$

La courbe trouvée est appelée *lemniscate*.

40. Former l'équation de la lemniscate en coordonnées polaires.

S o l u t i o n. En partant de l'équation $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$ (cf. problème précédent), on passe aux coordonnées polaires à l'aide des formules $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. L'équation de la lemniscate en coordonnées polaires ainsi obtenue est de la forme $\rho^2 = 2a^2 \cdot \cos 2\theta$.

Construisons la courbe. Résolvons l'équation par rapport à ρ : $\rho = \pm a \sqrt{2 \cos 2\theta}$. Le double signe $\pm$ dont est muni le deuxième membre de l'égalité de même que l'invariabilité de l'équation avec le changement de θ en $-\theta$ montrent que la lemniscate est symétrique par rapport aux axes Ox et Oy. Etudions l'allure de la lemniscate dans le Ier quadrant, c'est-à-dire dans le cas où $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. Pour ces valeurs de ρ et de θ, on aura : $\rho = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos 2\theta}$. Il est aisé de voir qu'ici θ ne peut varier que de 0 à $\frac{\pi}{4}$. Si $\theta > \frac{\pi}{4}$, alors ρ prend des valeurs imaginaires. On voit de cette façon que la partie correspondante de la courbe se trouve dans l'angle compris entre l'axe polaire et la demi-droite $\theta = \frac{\pi}{4}$. Si $\theta = 0$, alors $\rho = a\sqrt{2}$. Avec l'augmentation de θ de 0 à $\frac{\pi}{4}$, la valeur de ρ diminue jusqu'à $\rho = 0$.

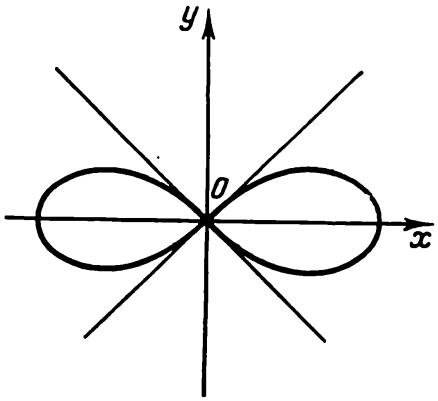


Fig. 3

En vertu des considérations de symétrie, la lemniscate peut être construite comme il est montré sur la figure 3.

41. Former l'équation du lieu géométrique des points équidistants des deux points A (1 ; 1), B (3 ; 3).

S o l u t i o n. On sait de la géométrie élémentaire que le lieu géométrique cherché est représenté par une droite qui passe par le point milieu du segment AB et lui est perpendiculaire. Prenons un point arbitraire M (x ; y) sur cette droite.

Suivant la condition du problème, $MA = MB$. En appliquant la formule de la distance de deux points, on a

$$MA = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}, \quad MB = \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

et l'équation de la ligne peut s'écrire

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}.$$

En élevant au carré, on a

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9.$$

En réduisant les termes semblables, on arrive finalement à l'équation suivante du lieu géométrique cherché:

$$x + y - 4 = 0.$$

42. Un point M se déplace uniformément suivant une demi-droite qui tourne uniformément autour du pôle. Former l'équation de la ligne décrite par le point M si au moment initial la demi-droite tournante coïncide avec l'axe polaire et le point M se confond avec le pôle; lorsque la demi-droite tourne d'un angle $\theta = 1$ (un radian), le point M s'écarte du pôle à une distance a.

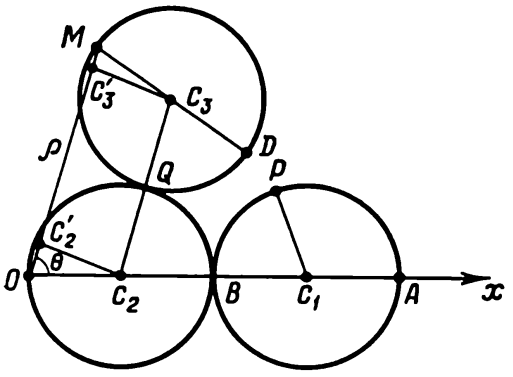


Fig. 4

Solution. Etant donné qu'au moment initial ρ et θ sont nuls et qu'ils croissent ensuite en rapport directement proportionnel au temps, on voit sans difficulté que ces grandeurs sont liées par la dépendance directement proportionnelle $\frac{\rho}{\theta} = \text{const}$. Vu que, pour $\theta = 1$, $\rho = a$, on a $\frac{\rho}{\theta} = \frac{a}{1}$, c'est-à-dire $\rho = \theta$. La courbe d'équation $\rho = a\theta$ est appelée *spirale d'Archimède*.

43. Un cercle de diamètre a roule sans glisser sur un autre cercle de même diamètre qui lui est tangent extérieurement. Former l'équation en coordonnées polaires de la ligne décrite par un certain point fixé du cercle qui roule.

Solution. Sur la figure 4 on a:

C_1, position initiale du centre du cercle qui roule;

A, position initiale du point qui décrit la ligne cherchée (le point A est diamétralement opposé au point B qui est le point de tangence initiale des deux cercles);

C_2, centre du cercle immobilisé;

C_3, nouvelle position du centre du cercle qui roule;

M, nouvelle position du point A qui décrit la ligne cherchée.

(Lorsque le cercle C_1 arrive en C_3, le point P occupera la position Q et le point B se situera en D. Etant donné que le roulement a lieu sans glissement, $\overset{\smile}{BQ} = \overset{\smile}{DQ}$, $\angle QC_2B = \angle QC_3D$.)

Sur la figure 4 on voit également la position du pôle O et l'axe polaire Ox. On demande de former l'équation satisfaite par les coordonnées de tout point M (ρ; θ) de la ligne cherchée.

Il est aisé de voir que $\angle MC_3Q = \angle OC_2Q$, ce qui indique que le quadrilatère OC_2C_3M est un trapèze isocèle dont la base supérieure $C_2C_3 = a$; C_2C_2' et C_3C_3' sont les perpendiculaires abaissées des points C_2 et C_3 sur la droite OM. Donc,

$$\rho = OC_2' + C_2'C_3' + C_3'M = \frac{a}{2}\cos\theta + a + \frac{a}{2}\cos\theta = a(1+\cos\theta).$$

De cette façon, l'équation en coordonnées polaires de la ligne cherchée est de la forme $\rho = a(1 + \cos\theta)$; cette courbe est appelée *cardioïde*.

Vu que l'équation de la cardioïde ne change pas lorsque θ prend le signe « — », on comprend qu'elle est symétrique par rapport à l'axe polaire.

Lorsque θ varie de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$, ρ va décroître de $2a$ à 0.

5. Equations paramétriques d'une ligne. Lors de la recherche des lieux géométriques (des lignes), il est parfois plus commode d'exprimer les coordonnées x et y d'un point quelconque de ce lieu par une certaine grandeur auxiliaire t (appelée *paramètre*), c'est-à-dire de mettre x et y sous la forme

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \varphi(t). \end{cases} \quad \{A\}$$

Une telle présentation de la ligne cherchée est appelée paramétrique, les équations du système $\{A\}$ étant les équations paramétriques de la ligne donnée.

L'élimination du paramètre t entre les équations du système $\{A\}$ (si c'est possible) aboutit à une équation qui lie x et y, c'est-à-dire à une équation ordinaire de la ligne de la forme $f(x, y) = 0$.

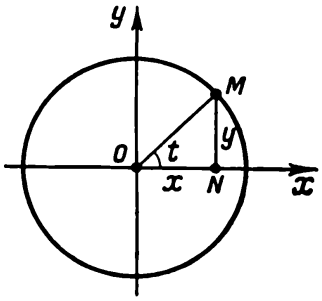


Fig. 5

44. Trouver les équations paramétriques d'un cercle.

Solution. Considérons un cercle de rayon a dont le centre se situe à l'origine des coordonnées (fig. 5). Prenons sur ce cercle un point arbitraire M (x; y) et choisissons comme paramètre t l'angle formé par l'axe des abscisses avec le rayon OM.

Du triangle OMN on a

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t.$$

Ainsi, les équations

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}$$

sont les équations paramétriques du cercle.

En éliminant le paramètre t entre ces équations, on obtient l'équation ordinaire du cercle. Dans le cas considéré, l'élimination du paramètre s'obtient par l'élévation au carré de chacune des deux équations et par la sommation des nouvelles équations qui en résultent :

$$\begin{array}{r} x^2 = a^2 \cdot \cos^2 t \\ + \quad y^2 = a^2 \cdot \sin^2 t \\ \hline x^2 + y^2 = a^2. \end{array}$$

La dernière des équations est l'équation d'un cercle de rayon a dont le centre se confond avec l'origine des coordonnées.

45. Former les équations paramétriques de la courbe décrite par un point fixé d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe.

S o l u t i o n. Supposons qu'un cercle de rayon a roule sans glisser vers la droite sur une droite horizontale (fig. 6). Prenons cette

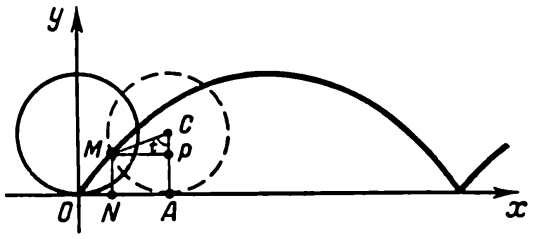


Fig. 6

droite en tant qu'axe des abscisses Ox et plaçons l'origine des coordonnées à un certain point O de cet axe.

Comme point fixé du cercle (point qui va décrire la courbe cherchée) choisissons celui qui se confond avec le point O lorsque le cercle occupe la position correspondante. Prenons comme paramètre t l'angle de rotation du rayon du cercle qui passe par le point fixé.

Soit A le point de tangence entre le cercle et l'axe Ox à un certain moment. Alors le point fixé occupera la position M $(x;\ y)$ correspondant à l'angle de rotation t du rayon CM $(t = \angle ACM)$. Vu que le roulement s'effectue sans glissement, $OA = \overset{\smile}{MA} = at$. Compte tenu de ce fait, exprimons par t les coordonnées du point M :

$$x = ON = OA - NA = \overset{\smile}{MA} - NA = at - a\sin t = \\ = a\,(t - \sin t),$$

$$y = NM = AP = AC - PC = a - a\cos t = a\,(1 - \cos t).$$

Ainsi, les équations paramétriques de la ligne cherchée seront

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

La ligne obtenue, que l'on voit sur la figure 6, est appelée *cycloïde*.

46. Quelle est la ligne définie par les équations paramétriques $x = t^2$, $y = t^2$?

S o l u t i o n. En éliminant le paramètre t, on arrive à l'équation $y = x$. Mais, en vertu des équations paramétriques, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Donc, les équations paramétriques données définissent une demi-droite dirigée suivant la bissectrice du Ier quadrant.

47. Quelle est la ligne définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \cos^2 t\,? \end{cases}$$

S o l u t i o n. En substituant x à $\cos t$ dans la seconde équation, on obtient l'équation de la parabole $y = x^2$. Des équations paramétriques il découle : $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Par conséquent, les équations paramétriques définissent l'arc AOB de la parabole $y = x^2$, où $A(-1;\ 1)$, $B(1;\ 1)$.

48. Quelle est la ligne définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \operatorname{cosec} t\,? \end{cases}$$

S o l u t i o n. Vu que $y = \dfrac{1}{\sin t}$, en éliminant t, on obtient l'équation $y = \dfrac{1}{x}$ qui exprime la dépendance inversement proportionnelle des grandeurs x et y.

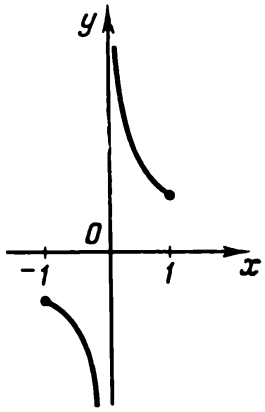


Fig. 7

Prenant en considération le fait que $|x| \leqslant 1$, $|y| \geqslant 1$, on arrive à la conclusion que la ligne donnée par les équations paramétriques $x = \sin t$, $y = \operatorname{cosec} t$ se présente sous la forme représentée sur la figure 7.

49. Trouver l'équation du lieu géométrique des points équidistants des points $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 1)$.

Réponse. $y = 2x - \dfrac{3}{2}$.

50. Quelle est la ligne définie par l'équation $x = y$?

Réponse. La bissectrice du Ier et du IIIe quadrants.

51. Quelle est la ligne définie par l'équation $x = -y$?

Réponse. La bissectrice du IIe et du IVe quadrants.

52. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances aux points A (2; 0) et B (0; 2) est égale au carré de la distance des points A et B.

Réponse. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

53. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des distances aux points A (1; 0) et B (0; 1) est égale à 2.

Réponse. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$.

54. Former en coordonnées polaires l'équation d'un cercle dont le centre se situe à l'origine des coordonnées.

Réponse. $\rho = a$.

55. Former en coordonnées polaires l'équation d'une demi-droite passant par le pôle et formant avec l'axe polaire l'angle α.

Réponse. $\theta = \alpha$.

56. Former en coordonnées polaires l'équation d'un cercle de diamètre a si le pôle se situe sur le cercle, tandis que l'axe polaire passe par son centre.

Réponse. $\rho = a \cos \theta$.

57. Quelle est la ligne définie par l'équation $x = 2t$, $y = 4t$?

Réponse. La droite $y = 2x$ passant par l'origine des coordonnées.

58. Soit une courbe donnée par les équations paramétriques suivantes:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Trouver l'équation de cette ligne en coordonnées rectangulaires.

Indication. Diviser par a la première équation, par b la seconde et éliminer ensuite t entre ces deux équations.

Réponse. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (la courbe représentée par cette équation s'appelle *ellipse*).

59. Soit une courbe donnée par les équations paramétriques suivantes:

$$\begin{cases} x = a \sec t, \\ y = b \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Trouver l'équation de cette courbe en coordonnées rectangulaires.

Réponse. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (la courbe en question est appelée *hyperbole*).

60. Quelle est la ligne définie par les équations suivantes:

$$\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t? \end{cases}$$

Réponse. Le segment de droite qui joint le point A (1; 0) au point B (0; 1).

61. La courbe définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

est appelée *astroïde*. En éliminant t entre les équations de ce système, trouver l'équation de l'astroïde en coordonnées rectangulaires.

Réponse. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

62. Sur un cercle de centre O et de rayon a est enroulé dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre un fil dont l'une des extrémités est fixée au point A $(a; 0)$ de ce cercle. On commence à dérouler le fil en partant de l'extrémité libre et en le roulant dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre de façon qu'il soit toujours tendu. Former les équations paramétriques de la courbe décrite par l'extrémité libre du fil si l'on prend comme paramètre t l'angle formé par le rayon OA et le rayon OB mené au point de tangence du cercle avec le fil tendu occupant une position arbitraire.

Réponse.

$$\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

(cette courbe est appelée *développante de cercle*).

§ 2. Ligne droite

1. Equation générale d'une droite. Toute équation du 1er degré en x et y de la forme

$$Ax + By + C = 0$$

(où A, B et C sont des coefficients constants et $A^2 + B^2 \neq 0$) définit dans le plan une certaine droite. Cette équation est appelée *équation générale* de la droite.

Cas particuliers. 1. $C = 0$; $A \neq 0$; $B \neq 0$. La droite définie par l'équation $Ax + By = 0$ passe par l'origine des coordonnées.

2. $A = 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$. La droite définie par l'équation $By + C = 0$ $\left(\text{ou } y = b, \text{ où } b = -\frac{C}{B}\right)$ est parallèle à l'axe Ox.

3. $B = 0$; $A \neq 0$; $C \neq 0$. La droite définie par l'équation $Ax + C = 0$ $\left(\text{ou } x = a, \text{ où } a = -\frac{C}{A}\right)$ est parallèle à l'axe Oy.

4. $B = C = 0$; $A \neq 0$. La droite définie par l'équation $Ax = 0$ (ou $x = 0$ étant donné que $A \neq 0$) se confond avec l'axe Oy.

5. $A = C = 0$; $B \neq 0$. La droite définie par l'équation $By = 0$ (ou $y = 0$ étant donné que $B \neq 0$) se confond avec l'axe Ox.

2. Equation d'une droite contenant son coefficient angulaire. Si dans l'équation générale d'une droite $B \neq 0$, en la résolvant par rapport à y, on obtient une équation de la forme

$$y = kx + b$$

$\left(\text{ici, } k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}\right)$. Mise sous cette forme, l'équation est appelée *équation de la droite contenant son coefficient angulaire*, car $k = \operatorname{tg}\alpha$, où α représente

l'angle fait par la droite avec le sens positif de l'axe Ox. Le terme connu b n'est autre chose que l'ordonnée du point d'intersection de la droite considérée avec l'axe Oy (ordonnée à l'origine).

3. Equation d'une droite exprimée par les segments qu'elle détermine sur les axes de coordonnées. Si dans l'équation générale d'une droite $C \neq 0$ et on divise tous ses termes par $-C$, on obtient une équation de la forme

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$\left(\text{ici, } a=-\frac{C}{A},\ b=-\frac{C}{B}\right)$. Mise sous cette forme, l'équation est appelée *équation de la droite exprimée par les segments* qu'elle détermine sur les axes de coordonnées. Dans cette équation, a représente l'abscisse du point d'intersection de la droite et de l'axe Ox, tandis que b est l'ordonnée du point d'intersection de notre droite et de l'axe Oy. Pour cette raison, a et b sont les *segments* déterminés par la droite considérée sur les axes de coordonnées.

4. Equation normale d'une droite. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation d'une droite $Ax+By+C=0$ par le nombre $\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ (ce nombre est appelé facteur de normalisation) et si l'on choisit le signe du radical de façon que la condition $\mu\cdot C<0$ soit satisfaite, on obtient une équation de la forme

$$x\cdot\cos\varphi+y\cdot\sin\varphi-p=0.$$

Cette équation est appelée *équation normale* de la droite. Ici, p représente la longueur de la perpendiculaire menée à la droite par l'origine des coordonnées, φ étant l'angle que fait cette perpendiculaire avec le sens positif de l'axe Ox.

63. Former l'équation de la droite qui détermine sur l'axe des ordonnées le segment $b=-3$ en formant avec le sens positif de l'axe des abscisses l'angle $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

Solution. On trouve le coefficient angulaire $k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=$ $=\frac{1}{\sqrt{3}}$. En utilisant l'équation contenant le coefficient angulaire, on obtient $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-3$; en multipliant les deux membres de cette équation par $-\sqrt{3}$ et en faisant passer tous les termes dans le premier membre, on arrive à l'équation générale de la droite $x-\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0$.

64. Former l'équation de la droite qui détermine sur les axes de coordonnées les segments $a=\frac{2}{5}$, $b=-\frac{1}{10}$.

Solution. En effectuant les substitutions correspondantes dans l'équation de la droite exprimée par les segments qu'elle détermine sur les axes de coordonnées, on trouve

$$\frac{x}{\frac{2}{5}}+\frac{y}{-\frac{1}{10}}=1.$$

Cette équation peut être mise sous la forme $\frac{5}{2}x - 10y = 1$, ou $5x - 20y - 2 = 0$ (équation générale de la droite).

65. On donne l'équation d'une droite sous sa forme générale: $12x - 5y - 65 = 0$. Ecrire: a) l'équation de cette droite contenant son coefficient angulaire; b) l'équation de cette droite exprimée par les segments qu'elle détermine sur les axes de coordonnées; c) l'équation de cette droite sous sa forme normale.

Solution. a) En résolvant l'équation par rapport à y, on obtient l'équation contenant le coefficient angulaire de la droite $y = \frac{12}{5}x - 13$. Ici, $k = \frac{12}{5}$, $b = -13$.

b) Portons le terme connu de l'équation générale dans le deuxième membre et divisons les deux membres par 65. On a $\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$. En écrivant la dernière équation sous la forme

$$\frac{x}{\frac{65}{12}} + \frac{y}{-\frac{65}{5}} = 1,$$

on obtient l'équation de la droite donnée exprimée par les segments qu'elle détermine sur les axes de coordonnées. Ici, $a = \frac{65}{12} = 5\frac{5}{12}$, $b = -\frac{65}{5} = -13$.

c) On détermine le facteur de normalisation $\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}$. En multipliant les deux membres de l'équation générale par ce facteur, on obtient l'équation normale de la droite

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0.$$

Ici, $\cos\varphi = \frac{12}{13}$, $\sin\varphi = -\frac{5}{13}$, $p = 5$.

66. Construire les droites: a) $x - 2y + 5 = 0$; b) $2x + 3y = 0$; c) $5x - 2 = 0$; d) $2y + 7 = 0$.

Solution. a) En mettant dans l'équation donnée $x = 0$, on obtient $y = 2\frac{1}{2}$. Il s'ensuit que la droite coupe l'axe des ordonnées au point $B\left(0;\ 2\frac{1}{2}\right)$.

En mettant $y = 0$, on a $x = -5$, ce qui signifie que le point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses est le point $A\ (-5;\ 0)$.

Il ne reste qu'à mener la droite qui passe par les points $A\ (-5;\ 0)$, $B\left(0;\ 2\frac{1}{2}\right)$ (fig. 8).

b) La droite $2x + 3y = 0$ passe par l'origine des coordonnées, car le terme connu manque. Donnons une valeur quelconque à x. Soit, par exemple, $x = 3$. Alors $6 + 3y = 0$, c'est-à-dire $y = -2$. On obtient de cette façon le point $M(3; -2)$. On mène la droite qui passe par l'origine des coordonnées et par le point M.

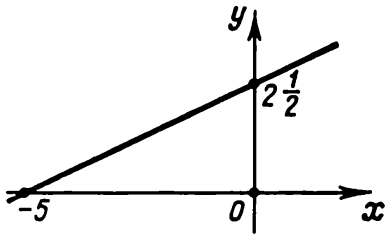


Fig. 8

c) Résolvons l'équation de la droite par rapport à x. On obtient $x = \frac{2}{5}$. On voit que la droite en question est parallèle à l'axe des ordonnées et qu'elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{2}{5}$.

d) D'une façon analogue au cas précédent, on obtient l'équation $y = -3\frac{1}{2}$; c'est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

67. On donne l'équation de la droite $\frac{x+2\sqrt{5}}{4}+\frac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$. Ecrire: a) l'équation générale de cette droite; b) l'équation contenant le coefficient angulaire de cette droite; c) l'équation exprimée par les segments que cette droite détermine sur les axes de coordonnées; d) l'équation normale de cette droite.

Réponse. a) $x+2y-2\sqrt{5}=0$; b) $y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{5}$; c) $\frac{x}{2\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{5}}=1$; d) $\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-2=0$.

68. Quel angle la droite $2x + 2y - 5 = 0$ forme-t-elle avec le sens positif de l'axe des abscisses?

Réponse. 135°.

69. Déterminer l'aire du triangle formé par la droite $4x + 3y - 36 = 0$ et les axes de coordonnées.

Réponse. 54.

70. Peut-on écrire l'équation de la droite $20x + 21y = 0$ de manière qu'elle soit exprimée par les segments déterminés sur les axes de coordonnées?

Réponse. Il n'est pas possible.

71. Construire les droites suivantes: a) $4x - 5y + 15 = 0$; b) $2x - y = 0$; c) $7x - 10 = 0$; d) $2y + 3 = 0$.

72. Former l'équation de la droite qui détermine sur l'axe des ordonnées le segment $b = 1$ et qui forme avec le sens positif de l'axe des abscisses l'angle $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

Réponse. $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$.

73. Soit une droite qui coupe les axes de coordonnées en déterminant ainsi des segments égaux positifs. Former l'équation de cette droite sachant que l'aire du triangle formé par la droite et les axes de coordonnées est égale à 8.

Réponse. $x + y - 4 = 0$.

74. Former l'équation de la droite qui passe par l'origine des coordonnées et par le point A $(-2; -3)$.

Réponse. $3x - 2y = 0$.

75. Former l'équation de la droite qui passe par le point A $(2; 5)$ et qui détermine sur l'axe des ordonnées le segment $b = 7$.

Réponse. $x + y - 7 = 0$.

76. Former l'équation des droites passant par le point M $(-3; -4)$ et parallèles aux axes de coordonnées.

Réponse. $x + 3 = 0$; $y + 4 = 0$.

77. Former l'équation de la droite qui détermine sur les axes de coordonnées des segments égaux si la longueur du segment situé sur cette droite et compris entre les points d'intersection avec les axes de coordonnées est égale à $5\sqrt{2}$.

Réponse. $x + y - 5 = 0$. $x + y + 5 = 0$.

5. Angle de deux droites. Equation d'une droite passant par deux points. L'angle φ, compté dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre à partir de la droite $y = k_1x + b_1$ jusqu'à la droite $y = k_2x + b_2$, est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Deux droites $y = k_1x + b_1$ et $y = k_2x + b_2$ sont *parallèles* si, et seulement si, $k_1 = k_2$.

La condition pour que ces deux droites soient perpendiculaires s'écrit $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

L'équation d'une droite de coefficient angulaire k qui passe par le point M $(x_1; y_1)$ s'écrit sous la forme

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

L'équation d'une droite passant par les points M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$ s'écrit

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Si $x_1 = x_2$, l'équation de la droite qui passe par les points M_1 et M_2 prend la forme $x = x_1$.

Si $y_1 = y_2$, l'équation de la droite qui passe par les points M_1 et M_2 devient $y = y_1$.

6. Intersection de deux droites. Distance d'un point à une droite. Faisceau de droites. Si $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, les coordonnées du point d'intersection des droites $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ sont trouvées en résolvant simultanément les équations de ces droites.

La distance d'un point $M(x_0; y_0)$ à une droite $Ax + By + C = 0$ est donnée par la formule

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Les équations des bissectrices des angles de deux droites $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ sont

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

Si deux droites concourantes sont données par les équations $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, alors l'équation

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

où λ est un facteur numérique, définit une droite qui passe par le point d'intersection des deux droites données. Si l'on donne à λ différentes valeurs, on obtient différentes droites formant un *faisceau* dont le centre se situe au point d'intersection des droites données.

78. Déterminer l'angle des droites $y = 2x + 5$ et $y = -3x + 1$

Solution. Prenons $k_1 = 2$, $k_2 = -3$. Alors $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{-3-2}{1-6} = 1$, c'est-à-dire $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

79. Montrer que les droites $4x - 6y + 7 = 0$ et $20x - 30y - 11 = 0$ sont parallèles.

Solution. En mettant l'équation de chaque droite sous la forme à coefficient angulaire, on obtient

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6} \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{30}.$$

Les coefficients angulaires de ces droites sont égaux entre eux: $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$. Cela nous permet de tirer la conclusion que les droites considérées sont parallèles.

80. Montrer que les droites $3x - 5y + 7 = 0$ et $10x + 6y - 3 = 0$ sont perpendiculaires.

Solution. Après avoir mis les équations sous la forme à coefficient angulaire, on a $y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$ et $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$. Ici, $k_1 = \frac{3}{5}$, $k_2 = -\frac{5}{3}$. Etant donné que $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, les droites sont perpendiculaires.

81. Former l'équation de la droite passant par les points $M(-1;\ 3)$, $N(2;\ 5)$.

Solution. Mettons, dans l'équation $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, $x_1=-1$, $y_1=3$, $x_2=2$, $y_2=5$. On obtient $\frac{y-3}{5-3}=\frac{x+1}{2+1}$, ou $\frac{y-3}{2}=\frac{x+1}{3}$. Donc, l'équation cherchée est de la forme $2x-3y+11=0$. Il est bon de vérifier que l'équation ainsi obtenue est correctement formée. Pour cela, il suffit de montrer que les coordonnées des points M et N vérifient l'équation de la droite.

En effet, les équations

$$2(-1)-3\cdot 3+11=0,$$
$$2\cdot 2-3\cdot 5+11=0$$

sont des identités.

82. Former l'équation de la droite passant par les points $A(-2;\ 4)$, $B(-2;\ -1)$.

Solution. Vu que $x_1=x_2=-2$, l'équation de la droite s'écrit $x=-2$ (la droite est parallèle à l'axe des ordonnées).

83. Montrer que les droites $3x-2y+1=0$ et $2x+5y-12=0$ sont concourantes et trouver les coordonnées de leur point d'intersection.

Solution. Vu que $\frac{3}{2}\neq\frac{-2}{5}$, les droites sont concourantes. En résolvant simultanément le système d'équations

$$\begin{cases} 3x-2y+1=0, \\ 2x+5y-12=0, \end{cases}$$

on trouve que $x=1$, $y=2$, ce qui signifie que les droites ont comme point d'intersection le point $(1;\ 2)$.

84. Déterminer la distance d'un point $M(x_0;\ y_0)$ à une droite $Ax+By+C=0$ sans s'adresser à l'équation normale de la droite.

Solution. Le problème se réduit à la détermination de la distance qui sépare le point $M(x_0;\ y_0)$ du point N, pied de la perpendiculaire abaissée du point $M(x_0;\ y_0)$ sur la droite $Ax+By+C=0$. Formons l'équation de la droite MN. Etant donné que le coefficient angulaire de la droite donnée est $-\frac{A}{B}$, la condition d'orthogonalité implique que le coefficient angulaire de la droite MN soit égal à $\frac{B}{A}$ et l'équation de la droite MN prend la forme $y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$. Cette équation peut s'écrire $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}$.

Pour déterminer les coordonnées du point N, résolvons le système d'équations

$$Ax+By+C=0 \quad \text{et} \quad \frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}.$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire t:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=t.$$

Alors $x = x_0 + At$, $y = y_0 + Bt$. Portons ces valeurs dans l'équation de la droite donnée: $A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C = 0$. On trouve

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}.$$

En substituant la valeur de t dans les équations $x = x_0 + At$ et $y = y_0 + Bt$, déterminons les coordonnées du point N:

$$x=x_0-A\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2},$$

$$y=y_0-B\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}.$$

Il reste à déterminer la distance des points M et N. En appliquant la formule

$$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

c'est-à-dire

$$d=\sqrt{\left(x_0-A\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(y_0-B\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(A\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}\right)^2+\left(B\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}\right)^2}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

d'où

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

85. Déterminer la distance du point $M(1;\ 2)$ à la droite $20x - 21y - 58 = 0$.

Solution. On a

$$d=\frac{|20\cdot1-21\cdot2-58|}{\sqrt{400+441}}=\frac{|20-42-58|}{29}=\frac{|-80|}{2}=2\frac{22}{29}.$$

86. On donne la droite $4x - 3y - 7 = 0$. Déterminer parmi les points ci-après ceux qui se trouvent sur cette droite: $A\left(2\frac{1}{2};\ 1\right)$, $B(3;\ 2)$, $C(1;\ -1)$, $D(0;\ -2)$, $E(4;\ 3)$, $F(5;\ 2)$.

S o l u t i o n. Les coordonnées d'un point situé sur la droite doivent vérifier l'équation de cette droite.

Le point A se trouve sur la droite donnée, car $4 \cdot 2 \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 - 7 = 0$. Le point B ne se situe pas sur la droite, car $4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 7 \neq 0$.

Le point C se trouve sur la droite, car $4 \cdot 1 - 3(-1) - 7 = 0$.

Le point D ne se trouve pas sur la droite, car $4 \cdot 0 - 3(-2) - 7 \neq 0$.

Le point E se trouve sur la droite, car $4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 7 = 0$.

Le point F ne se situe pas sur la droite, car $4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 7 \neq 0$.

87. Former l'équation de la droite passant par le point $M(-2; -5)$ et parallèle à la droite $3x + 4y + 2 = 0$.

S o l u t i o n. Résolvons la dernière équation par rapport à y: $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$. Donc, en vertu de la condition que les droites soient parallèles, le coefficient angulaire de la droite cherchée est égal à $-\frac{3}{4}$. En faisant appel à l'équation $y - y_1 = k(x - x_1)$, on obtient $y-(-5) = -\frac{3}{4}[x - (-2)]$, c'est-à-dire $3x + 4y + 26 = 0$.

88. On donne les sommets $A(2; 2)$, $B(-2; -8)$, $C(-6; -2)$ d'un triangle. Former les équations des médianes de ce triangle.

S o l u t i o n. On trouve les coordonnées du milieu du côté BC:

$$x' = \frac{-2-6}{2} = -4, \quad y' = \frac{-8-2}{2} = -5; \quad A_1(-4; -5).$$

On trouve les coordonnées du milieu du côté AC:

$$x'' = \frac{2-6}{2} = -2, \quad y'' = \frac{2-2}{2} = 0; \quad B_1(-2; 0).$$

On trouve les coordonnées du milieu du côté AB:

$$x''' = \frac{2-2}{2} = 0, \quad y''' = \frac{2-8}{2} = -3; \quad C_1(0; -3).$$

On trouve les équations des médianes en utilisant l'équation de la droite passant par deux points donnés. Ainsi, l'équation de la médiane AA_1 s'écrira

$$\frac{y-2}{-5-2} = \frac{x-2}{-4-2}, \quad \frac{y-2}{7} = \frac{x-2}{6},$$

c'est-à-dire

$$7x - 6y - 2 = 0.$$

On trouve l'équation de la médiane BB_1; étant donné que les points $B(-2; -8)$ et $B_1(-2; 0)$ sont de même abscisse, la médiane BB_1 est parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation est $x + 2 = 0$.

L'équation de la médiane CC_1:

$$\frac{y+2}{-3+2}=\frac{x+6}{0-6},$$

ou

$$x+6y+18=0.$$

89. On donne les sommets A (0; 1), B (6; 5), C (12; —1) d'un triangle. Former l'équation de la hauteur de ce triangle abaissée du sommet C.

Solution. On forme l'équation du côté AB:

$$\frac{y-1}{5-1}=\frac{x}{6}, \text{ ou } 2x-3y+3=0.$$

Le coefficient angulaire du côté AB est égal à $\frac{2}{3}$; en vertu de la condition d'orthogonalité, le coefficient angulaire de la hauteur menée du sommet C sera $-\frac{3}{2}$.

L'équation de cette hauteur est de la forme

$$y+1=-\frac{3}{2}(x-12), \quad \text{ou} \quad 3x+2y-34=0.$$

90. On donne les côtés $x+3y-7=0$ (AB), $4x-y-2=0$ (BC), $6x+8y-35=0$ (AC) d'un triangle. Trouver la longueur de la hauteur abaissée du sommet B.

Solution. On détermine les coordonnées du point B. En résolvant le système d'équations $x+3y-7=0$ et $4x-y-2=0$, on trouve $x=1$, $y=2$, c'est-à-dire B (1; 2). On trouve la longueur de la hauteur BB_1 par la formule de la distance du point B à la droite AC. On a

$$BB_1=\frac{|6\cdot 1+8\cdot 2-35|}{\sqrt{6^2+8^2}}=1{,}3.$$

91. Déterminer la distance des deux droites parallèles $3x+y-3\sqrt{10}=0$ et $6x+2y+5\sqrt{10}=0$.

Solution. On recommande au lecteur de s'assurer tout d'abord de l'égalité des coefficients angulaires des droites en question.

Le problème se réduit à la détermination de la distance d'un point quelconque de l'une des droites à l'autre droite. En mettant, par exemple, $x=0$ dans l'équation de la première droite, on obtient $y=3\sqrt{10}$.

De cette façon, M $(0; 3\sqrt{10})$ est un point situé sur la première droite. On détermine sa distance à la deuxième droite:

$$d=\frac{|6\cdot 0+2\cdot 3\sqrt{10}+5\sqrt{10}|}{\sqrt{36+4}}=\frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=5{,}5.$$

92. Former les équations des bissectrices des angles faits par les droites $x + y - 5 = 0$ (1) et $7x - y - 19 = 0$ (2) (fig. 9).

Solution. Résolvons d'abord ce problème sous forme générale. De la géométrie élémentaire on sait que les bissectrices des angles formés par deux droites constituent le lieu géométrique des points équidistants des droites considérées. Si les équations des droites données sont $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ $\left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}\right.$, c'est-à-dire que les droites ne sont pas parallèles$\left.\right)$, on a pour tout point $M(\bar{x}; \bar{y})$ situé sur l'une des bissectrices (on utilise la formule de la distance d'un point à une droite) :

$$\frac{|A_1\bar{x}+B_1\bar{y}+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{|A_2\bar{x}+B_2\bar{y}+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

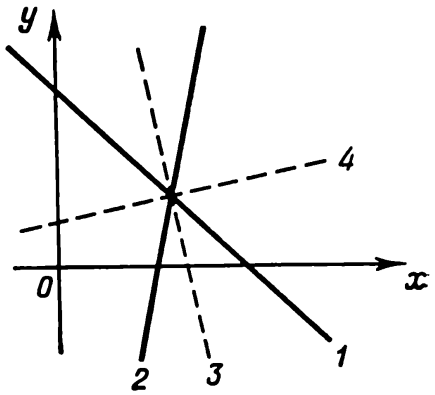


Fig. 9

Puisque $M(\bar{x}; \bar{y})$ est un point quelconque de la bissectrice, on peut le désigner tout simplement par $M(x; y)$. Compte tenu du fait que les expressions de la dernière égalité, comprises entre les traits verticaux indiquant la valeur absolue, peuvent être de signes différents, on trouve pour l'une des bissectrices l'équation

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

et pour l'autre

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = -\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

L'équation des deux bissectrices peut ainsi s'écrire

$$\frac{A_1x+B_1y+B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} = 0.$$

Résolvons maintenant le problème concret proposé. En substituant à A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 leurs valeurs figurant aux équations des droites données, on obtient :

$$\frac{x+y-5}{\sqrt{1+1}} \pm \frac{7x-y-19}{\sqrt{49+1}} = 0, \text{ c'est-à-dire } 5(x+y-5) \pm$$
$$\pm (7x-y-19) = 0.$$

L'équation de la première bissectrice sera $5(x + y - 5) + (7x - y - 19) = 0$, ou $12x + 4y - 44 = 0$, c'est-à-dire $3x + y - 11 = 0$ (3). L'angle formé par cette bissectrice avec l'axe

des abscisses est obtus, car son coefficient angulaire est négatif. L'équation de la seconde bissectrice sera $5(x+y-5)-(7x-y-19)=0$, c'est-à-dire $x-3y+3=0$ (4). Cette bissectrice forme avec l'axe des abscisses un angle aigu.

93. On donne les sommets A (1 ; 1), B (10 ; 13), C (13 ; 6) d'un triangle. Former l'équation de la bissectrice de l'angle A.

Solution. Utilisons une autre (par rapport au problème précédent) méthode d'établissement de l'équation de la bissectrice.

Soit D le point d'intersection de la bissectrice avec le côté BC. De la propriété de la bissectrice d'un angle intérieur d'un triangle, il découle que $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Mais

$$AB=\sqrt{(10-1)^2+(13-1)^2}=15,$$

$$AC=\sqrt{(13-1)^2+(6-1)^2}=13.$$

Donc, $\lambda=\frac{BD}{DC}=\frac{15}{13}$. Le rapport dans lequel le point D divise le segment BC étant connu, on détermine les coordonnées du point D par les égalités

$$x=\frac{10+15/13\cdot 13}{1+15/13},\quad y=\frac{13+15/13\cdot 6}{1+15/13},$$

ou

$$x=\frac{325}{28},\quad y=\frac{259}{28},\ \text{c'est-à-dire}\ D\left(\frac{325}{28};\ \frac{259}{28}\right).$$

Le problème se réduit à l'établissement de l'équation de la droite passant par les points A et D:

$$\frac{y-1}{\frac{259}{28}-1}=\frac{x-1}{\frac{325}{28}-1},\ \text{c'est-à-dire}\ 7x-9y+2=0.$$

94. On donne les équations de deux hauteurs $x+y-2=0$ et $9x-3y-4=0$ du triangle ABC et les coordonnées de son sommet $A(2;2)$. Former les équations des côtés de ce triangle.

Solution. On voit sans difficulté que le sommet A ne se situe pas sur les hauteurs données, car ses coordonnées ne satisfont pas les équations correspondantes.

Soient $9x-3y-4=0$ l'équation de la hauteur BB_1 et $x+y-2=0$ l'équation de la hauteur CC_1. Formons l'équation du côté AC qui peut être considéré comme une droite passant par le point A et perpendiculaire à la hauteur BB_1. Vu que le coefficient angulaire de la hauteur BB_1 est égal à 3, le coefficient angulaire du côté AC sera égal à $-\frac{1}{3}$, c'est-à-dire $k_{AC}=-\frac{1}{3}$. En utilisant l'équation d'une droite passant par un point donné et ayant un coef-

ficient angulaire connu, on obtient l'équation du côté AC : $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2)$, ou $x + 3y - 8 = 0$. D'une façon analogue on obtient $k_{CC_1} = -1$, $k_{AB} = 1$ et le côté AB est défini par l'équation $y - 2 = x - 2$, c'est-à-dire $y = x$. En résolvant simultanément les équations des droites AB et BB_1, de même que celles des droites AC et CC_1, on trouve les coordonnées des sommets B et C du triangle : B (2/3 ; 2/3) et C (—1 ; 3). Il ne reste qu'à former l'équation du côté BC :

$$\frac{y-2/3}{3-2/3} = \frac{x-2/3}{-1-2/3},$$

c'est-à-dire $7x + 5y - 8 = 0$.

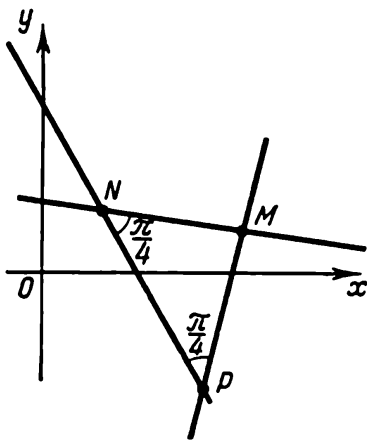


Fig. 10

95. Former les équations des droites passant par le point M (5 ; 1) et formant l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec la droite $2x + y - 4 = 0$ (fig. 10).

Solution. Soit k le coefficient angulaire de l'une des droites cherchées. Le coefficient angulaire de la droite donnée est égal à —2. Etant donné que l'angle de ces droites est égal à $\frac{\pi}{4}$, on a $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{k+2}{1-2k}$, ou $1 = \frac{k+2}{1-2k}$, $1 - 2k = k + 2$, c'est-à-dire $k = -\frac{1}{3}$. Ainsi, on a trouvé le coefficient angulaire de la droite MN. Le coefficient angulaire de la droite MP est trouvé de l'égalité $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{-2-k'}{1-2k'}$, c'est-à-dire $k' = 3$.

L'angle formé par les droites MP et NP est compté dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre depuis la droite MP de coefficient angulaire k' jusqu'à la droite NP de coefficient angulaire —2.

L'équation de la droite MN sera $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 5)$, c'est-à-dire $x + 3y - 8 = 0$.

L'équation de la droite MP sera $y - 1 = 3(x - 5)$, c'est-à-dire $3x - y - 14 = 0$.

Nota. Vu que $MN \perp MP$, le coefficient angulaire de la droite MP aurait pu être déterminé en partant de la condition d'orthogonalité : $k' = -\frac{1}{k}$, $k = -\frac{1}{3}$, donc $k' = 3$.

96. Trouver la droite appartenant au faisceau $2x + 3y + 5 + \lambda(x + 8y + 6) = 0$ et passant par le point M (1 ; 1).

Solution. Les coordonnées du point M doivent vérifier l'équation de la droite cherchée, ce qui nous permet d'obtenir λ à partir de l'équation

$$2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 5 + \lambda (1 + 8\cdot 1 + 6) = 0$$

ou

$$10 + 15\lambda = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda = -\frac{2}{3}.$$

En substituant la valeur de λ dans l'équation du faisceau, on obtient l'équation de la droite cherchée

$$2x + 3y + 5 - \frac{2}{3}(x + 8y + 6) = 0, \quad \text{ou} \quad 4x - 7y + 3 = 0.$$

97. Trouver la droite qui passe par le point d'intersection des droites $3x - 4y + 7 = 0$ et $5x + 2y + 3 = 0$ et qui est parallèle à l'axe des ordonnées.

Solution. La droite cherchée appartient au faisceau $3x - 4y + 7 + \lambda (5x + 2y + 3) = 0$. Ecrivons cette équation sous la forme $(3 + 5\lambda) x + (-4 + 2\lambda) y + (7 + 3\lambda) = 0$. Vu que la droite cherchée est parallèle à l'axe des ordonnées, le coefficient de y doit être nul : $-4 + 2\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 2$.

Il ne reste qu'à porter la valeur trouvée de λ dans l'équation du faisceau en obtenant ainsi l'équation cherchée $x + 1 = 0$.

98. On donne les côtés $x + 2y + 5 = 0$ (AB), $3x + y + 1 = 0$ (BC), $x + y + 7 = 0$ (AC) d'un triangle. Former l'équation de la hauteur du triangle abaissée sur le côté AC.

Solution. La hauteur cherchée appartient au faisceau $x + 2y + 5 + \lambda (3x + y + 1) = 0$.

Ecrivons l'équation comme suit : $(1 + 3\lambda) x + (2 + \lambda) y + (5 + \lambda) = 0$. Le coefficient angulaire d'une droite du faisceau est égal à $-\frac{1+3\lambda}{2+\lambda}$; étant donné que le coefficient angulaire de la droite AC est égal à -1, le coefficient angulaire de la hauteur cherchée est égal à 1 et λ se déduit de l'équation $-\frac{1+3\lambda}{2+\lambda} = 1$.

D'où, $1 + 3\lambda + 2 + \lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = -\frac{3}{4}$. En substituant la valeur trouvée de λ dans l'équation du faisceau, on trouve l'équation de la hauteur $\left(1 - \frac{9}{4}\right) x + \left(2 - \frac{3}{4}\right) y + \left(5 - \frac{3}{4}\right) = 0$, ou $5x - 5y - 17 = 0$.

99. On donne les sommets du triangle ABC : A (0 ; 2), B (7 ; 3), C (1 ; 6). Déterminer $\angle BAC = \alpha$.

Réponse. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{27}{11}$.

100. On donne les côtés $x + y - 6 = 0$, $3x - 5y + 14 = 0$, $5x - 3y - 14 = 0$. Former les équations des hauteurs de ce triangle.

Réponse. $x - y = 0$, $5x + 3y - 26 = 0$, $3x + 5y - 26 = 0$.

101. Former les équations des bissectrices des angles des droites $3x + 4y - 20 = 0$ et $8x + 6y - 5 = 0$.

Réponse. $14x + 14y - 45 = 0$, $2x - 2y + 35 = 0$.

102. On donne les sommets A (0; 0), B (—1; —3), C (—5; —1) d'un triangle. Former les équations des droites passant par les sommets du triangle et parallèles à ses côtés.

Réponse. $3x - y + 14 = 0$, $x - 5y - 14 = 0$, $x + 2y = 0$.

103. Former les équations des droites passant par le point M (2; 7) qui font avec la droite passant par les points A (—1; 7), B (8; —2) des angles de 45°.

Réponse. $x - 2 = 0$, $y - 7 = 0$.

104. Déterminer la distance du point M (2; —1) à la droite qui détermine sur les axes de coordonnées les segments $a = 8$, $b = 6$.

Réponse. 4,4.

105. Trouver la longueur de la hauteur abaissée du sommet C d'un triangle de sommets $A\left(1\frac{1}{2}; 1\right)$, $B\left(1; 1\frac{2}{3}\right)$, C (3; 3).

Réponse. 2,4.

106. Pour quelle valeur de m les droites $7x - 2y - 5 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$ et $mx + my - 8 = 0$ se coupent au même point.

Réponse. $m = 4$.

107. On donne les points milieux A_1 (—1; —1), B_1 (1; 9), C_1 (9; 1) des côtés d'un triangle. Former les équations des perpendiculaires aux côtés de ce triangle qui passent justement par ces points milieux.

Réponse. $x - y = 0$, $x + 5y - 14 = 0$, $5x + y - 14 = 0$.

108. Trouver l'angle aigu formé par l'axe des ordonnées et la droite passant par les points A $(2; \sqrt{3})$, B $(3; 2\sqrt{3})$.

Réponse. $\frac{\pi}{6}$.

109. Les points A (1; 2) et C (3; 6) représentent les sommets opposés d'un carré. Déterminer les coordonnées des deux autres sommets du carré.

Réponse. (0; 5), (4; 3).

110. Trouver sur l'axe des abscisses un point dont la distance à la droite $8x + 15y - 10 = 0$ est égale à 1.

Réponse. $\left(\frac{7}{8}; 0\right)$ et $\left(-\frac{27}{8}; 0\right)$.

111. On donne les sommets A (1; 1), B (4; 5), C (13; —4) d'un triangle. Former les équations de la médiane menée du sommet B et de la hauteur abaissée du sommet C. Calculer l'aire du triangle.

Réponse. $13x + 6y - 82 = 0$, $3x + 4y - 23 = 0$, $S = 31{,}5$.

112. Trouver les droites du faisceau $2x + 3y + 6 + \lambda(x - 5y - 6) = 0$ qui sont perpendiculaires aux droites de base de ce faisceau.

Réponse. $3x - 2y = 0$, $5x + y + 6 = 0$.

113. Trouver la droite passant par le point d'intersection des droites $x + 6y + 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$ et par le point $M\left(-\frac{4}{5}; 1\right)$.

Réponse. $5x + 4 = 0$.

114. Trouver la droite passant par le point d'intersection des droites $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ et parallèle à la droite $5x + 8y = 0$.

Réponse. $5x + 8y + 11 = 0$.

115. Trouver la droite passant par le point d'intersection des droites $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y + 1 = 0$ et parallèle à l'axe des abscisses.

Réponse. $5y + 2 = 0$.

116. Trouver la droite passant par le point d'intersection des droites $5x + 3y + 10 = 0$, $x + y - 15 = 0$ et par l'origine des coordonnées.

Réponse. $17x + 11y = 0$.

117. Trouver la droite passant par le point d'intersection des droites $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ et formant un angle de 135° avec l'axe des abscisses.

Réponse. $x + y + 1 = 0$.

118. Former les équations des droites passant par le point $M(a; b)$ et formant avec la droite $x + y + c = 0$ un angle de 45°.

Réponse. $x = a$, $y = b$.

119. On donne les côtés $x - y = 0$ (AB), $x + y - 2 = 0$ (BC), $y = 0$ (AC) d'un triangle. Former les équations de la médiane passant par le sommet B et de la hauteur abaissée du sommet A.

Réponse. $x = 1$, $y = x$.

120. Montrer que le triangle de côtés $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$, $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$, $x - y - 10 = 0$ est un triangle isocèle. Trouver l'angle au sommet de ce triangle.

Réponse. 30°.

121. On donne trois sommets successifs $A(0; 0)$, $B(1; 3)$, $C(7; 1)$ d'un parallélogramme. Trouver l'angle que font ses diagonales et montrer que le parallélogramme est un rectangle.

Réponse. $\varphi = 53°8'$.

122. On donne les côtés $x - y + 2 = 0$ (AB), $x = 2$ (BC), $x+y-2=0$ (AC) d'un triangle. Former l'équation de la droite passant par le sommet B du triangle et par le point situé sur le côté AC et qui divise ce dernier dans le rapport 1 : 3 (à partir du sommet A).

Réponse. $5x - 3y + 2 = 0$.

123. Montrer que le triangle de sommets $A(1; 1)$, $B(2; 1 + \sqrt{3})$, $C(3; 1)$ est un triangle équilatéral et calculer son aire.

Réponse. $\sqrt{3}$.

124. Montrer qu'un triangle dont les côtés sont donnés par des équations à coefficients entiers ne peut pas être un triangle équilatéral.

125. On donne le sommet A (3; 9) d'un triangle et les équations de deux de ses médianes: $y - 6 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$. Trouver les coordonnées de ses deux autres sommets.

Réponse. B (1; 3), C (11; 6).

126. Former l'équation de l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui passe par le point M (2; 3) si ses deux autres côtés se confondent avec les axes de coordonnées et si son aire est égale à 12.

Réponse. 1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$; 2) $\frac{x}{4(\sqrt{2}-1)}+\frac{y}{-6(\sqrt{2}-1)}=1$; 3) $\frac{x}{-4(\sqrt{2}+1)}+\frac{y}{6(\sqrt{2}-1)}=1$.

127. Former les équations de trois côtés d'un carré si l'on sait que son quatrième côté est représenté par un segment de la droite $4x + 3y - 12 = 0$ dont les extrémités se trouvent sur les axes de coordonnées.

Réponse. $3x - 4y - 9 = 0$, $3x - 4y + 16 = 0$, $4x + 3y - 37 = 0$, ou $4x + 3y + 13 = 0$.

§ 3. Courbes du second degré (coniques)

1. Cercle. Le *cercle* représente le lieu géométrique des points équidistants d'un point donné appelé centre. Si un cercle est de rayon r et si son centre se situe en C (a; b), l'équation de ce cercle prend la forme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \tag{1}$$

En particulier, si le centre du cercle coïncide avec l'origine des coordonnées l'équation ci-dessus devient

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

En ouvrant les parenthèses du premier membre de l'équation (1), on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0, \tag{2}$$

où $l = -2a$, $m = -2b$, $n = a^2 + b^2 - r^2$.

Dans le cas général, l'équation (2) définit un cercle si $l^2 + m^2 - 4n > 0$. Si $l^2 + m^2 - 4n = 0$, l'équation susmentionnée définit un point de coordonnées $\left(-\frac{l}{2}; -\frac{m}{2}\right)$, tandis que si $l^2 + m^2 - 4n < 0$, l'équation n'a pas d'interprétation géométrique. On dit, dans ce cas, que l'équation définit un cercle imaginaire.

Il est utile de se rappeler que l'équation d'un cercle contient deux termes de degré le plus élevé dont les coefficients sont égaux entre eux et qu'elle ne renferme pas de terme comprenant le produit de x par y.

La position réciproque d'un point M (x_1; y_1) et d'un cercle $x^2 + y^2 = r^2$ est déterminée par les conditions suivantes: si $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, le point M se trouve sur le cercle; si $x_1^2 + y_1^2 > r^2$, le point M se situe à l'extérieur du cercle; si $x_1^2 + y_1^2 < r^2$, le point M est à l'intérieur du cercle.

128. Trouver les coordonnées du centre et le rayon du cercle $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

S o l u t i o n. En divisant par 2 l'équation donnée et en groupant ses termes, on obtient $x^2 - 4x + y^2 + \frac{5}{2}y = 2$. Complétons les expressions $x^2 - 4x$ et $y^2 + \frac{5}{2}y$ de façon à obtenir des carrés parfaits. A cette fin, ajoutons respectivement au premier et au second binômes les quantités 4 et $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ (en même temps, on ajoute au deuxième membre la somme de ces nombres). Il en résulte

$$(x^2 - 4x + 4) + \left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) = 2 + 4 + \frac{25}{16},$$

ou

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}.$$

De cette façon, on trouve les coordonnées $a = 2$ et $b = -\frac{5}{4}$ du centre du cercle et son rayon $r = \frac{11}{4}$.

129. Former l'équation du cercle circonscrit au triangle de côtés $9x - 2y - 41 = 0$, $7x + 4y + 7 = 0$, $x - 3y + 1 = 0$.

S o l u t i o n. Trouvons les coordonnées des sommets du triangle en résolvant simultanément les trois systèmes d'équations ci-dessous :

$$1)\ \begin{cases} 9x - 2y - 41 = 0, \\ 7x + 4y + 7 = 0, \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 9x - 2y - 41 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 7x + 4y + 7 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

On obtient $A\ (3;\ -7)$, $B\ (5;\ 2)$, $C\ (-1;\ 0)$.

Admettons que l'équation cherchée du cercle soit de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Pour trouver a, b et r, nous allons écrire trois égalités en substituant, dans l'équation cherchée, les coordonnées des points A, B, C aux coordonnées courantes :

$$(3 - a)^2 + (-7 - b)^2 = r^2; \quad (5 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2;$$
$$(-1 - a)^2 + b^2 = r^2.$$

En éliminant r^2, on arrive au système d'équations suivant :

$$(3 - a)^2 + (-7 - b)^2 = (5 - a)^2 + (2 - b)^2,$$
$$(3 - a)^2 + (-7 - b)^2 = (-1 - a)^2 + b^2,$$

ou $4a + 18b = -29$ et $8a - 14b = 57$. D'où l'on a $a = 3{,}1$, $b = -2{,}3$. La valeur de r^2 est donnée par l'équation $(-1 - a)^2 + b^2 = r^2$, c'est-à-dire $r^2 = 22{,}1$; l'équation du cercle cherché va s'écrire

$$(x - 3{,}1)^2 + (y + 2{,}3)^2 = 22{,}1.$$

130. Former l'équation du cercle passant par les points A (5 ; 0), B (1 ; 4) si son centre se situe sur la droite $x + y - 3 = 0$.

Solution. Trouvons les coordonnées du point M situé au milieu de la corde AB : $x_M = \frac{5+1}{2} = 3$, $y_M = \frac{4+0}{2} = 2$, donc M (3 ; 2). Le centre du cercle cherché doit se trouver sur la perpendiculaire élevée au point M. C'est pourquoi l'équation de cette perpendiculaire peut s'écrire sous la forme $y - 2 = k(x - 3)$; le coefficient angulaire k figurant dans cette équation peut être trouvé en partant de la condition d'orthogonalité de la perpendiculaire et de la corde AB dont l'équation est $\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-5}{1-5}$, ou $x + y - 5 = 0$.

Il s'ensuit que le coefficient angulaire de la perpendiculaire $k = 1$ et l'équation de cette perpendiculaire sera $y - 2 = 1 \cdot (x - 3)$ ou $x - y - 1 = 0$.

Le centre du cercle se situe au point d'intersection de la droite donnée et de la perpendiculaire, ce qui signifie que ses coordonnées sont déterminées par le système d'équations $x + y - 3 = 0$ et $x - y - 1 = 0$. D'où $x = 2$, $y = 1$, donc C (2 ; 1).

Le rayon du cercle est donné par la longueur du segment CA, c'est-à-dire $r = \sqrt{(5 - 2)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{10}$. De cette façon, l'équation du cercle sera finalement

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10.$$

131. Former l'équation de la corde du cercle $x^2 + y^2 = 49$ et dont le point milieu est A (1 ; 2).

Solution. Formons l'équation du diamètre du cercle passant par le point A (1 ; 2). On a $y = 2x$. La corde cherchée est perpendiculaire à ce diamètre et passe par le point A, donc son équation peut s'écrire $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, ou $x + 2y - 5 = 0$.

132. Trouver l'équation du cercle symétrique au cercle $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$ par rapport à la droite $x - y - 3 = 0$.

Solution. Mettons l'équation du cercle donné sous sa forme canonique $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$. Le centre de ce cercle se trouve au point C (1 ; 2) et son rayon est égal à 1. Trouvons les coordonnées du centre C_1 (x_1 ; y_1) du cercle symétrique. A cette fin, menons par le point C (1 ; 2) la perpendiculaire à la droite $x - y - 3 = 0$. L'équation de cette perpendiculaire sera $y - 2 = k(x - 1)$, où $k =$

$= -\frac{1}{1} = -1$, d'où l'on a $y - 2 = -x + 1$, ou $x + y - 3 = 0$. En résolvant simultanément les équations $x - y - 3 = 0$ et $x + y - 3 = 0$, on obtient $x = 3$, $y = 0$, donc la projection du point C (1 ; 2) sur la droite donnée sera le point P (3 ; 0). Les coordonnées du point symétrique peuvent être trouvées suivant les formules donnant les coordonées du milieu d'un segment $3 = \frac{1+x_1}{2}$, $0 = \frac{2+y_1}{2}$; de cette façon, $x_1 = 5$, $y_1 = -2$. Donc le centre du cercle symétrique se situe au point C_1 (5 ; —2) et son équation sera $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

133. Trouver le lieu géométrique des milieux des cordes du cercle $x^2 + y^2 = 4(y + 1)$ sachant qu'elles passent par l'origine des coordonnées.

Solution. L'équation des cordes est de la forme $y = kx$. Pour exprimer les coordonnées des points d'intersection des cordes et du cercle en fonction de k, résolvons le système d'équations $y = kx$ et $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$. On obtient l'équation quadratique $x^2(k^2 + 1) - 4kx - 4 = 0$. Ici, $x_1 + x_2 = \frac{4k}{1+k^2}$. Compte tenu du fait que la demi-somme de ces abscisses donne l'abscisse du milieu de la corde, on a $x = \frac{2k}{1+k^2}$, alors que l'ordonnée du milieu de la corde $y = \frac{2k^2}{1+k^2}$. Les deux dernières égalités représentent les équations paramétriques du lieu géométrique cherché.

En éliminant k (à cette fin, il suffit de mettre $k = \frac{y}{x}$ dans l'égalité $x = \frac{2k}{1+k^2}$), on arrive à l'équation du lieu géométrique cherché : $x^2 + y^2 - 2y = 0$. On voit que le lieu géométrique cherché est aussi un cercle.

134. Déterminer les coordonnées des centres et les rayons des cercles suivants : a) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; b) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 54 = 0$.

Réponse. a) $a = 4$, $b = -3$, $r = 5$; b) $a = -5$, $b = 2$, $r = 0$. L'équation définit un point : c) $a = 2$, $b = -7$, $r^2 = -1$. L'équation n'a pas d'interprétation géométrique (c'est un cercle imaginaire).

135. Trouver l'angle des deux rayons du cercle $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ si ces rayons aboutissent aux points d'intersection du cercle avec l'axe Oy.

Réponse. $\operatorname{tg} \varphi = -2{,}4$.

136. Former l'équation du cercle passant par les points A (1 ; 2), B (0 ; —1), C (—3 ; 0).

Réponse. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

137. Former l'équation du cercle passant par les points A (7 ; 7) et B (—2 ; 4) si son centre se situe sur la droite $2x - y - 2 = 0$.

Réponse. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

138. Former l'équation de la corde commune aux cercles $x^2 + y^2 = 16$ et $(x - 5)^2 + y^2 = 9$.

Réponse. $x = 3{,}2$.

139. Former les équations des tangentes aux cercles $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ aux points d'intersection de ce cercle avec la droite $x - y + 2 = 0$.

Réponse. $3x - 4y + 8 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$.

140. On donne le cercle $x^2 + y^2 = 4$. Du point A (—2 ; 0) on mène la corde AB qui est continuée jusqu'au point M de façon que $BM = AB$. Déterminer le lieu géométrique des points M.

Réponse. $(x - 2)^2 + y^2 = 16$.

2. Ellipse. L'*ellipse* est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points donnés, appelés foyers, est constante (on la désigne d'habitude par $2a$) étant toujours supérieure à la distance des deux foyers.

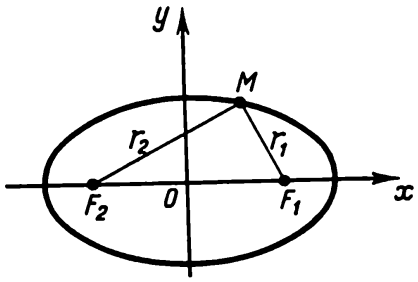


Fig. 11

Si les axes de coordonnées sont disposés par rapport à l'ellipse comme il est montré sur la figure 11, et si les foyers se trouvent sur l'axe Ox et à distances égales par rapport à l'origine des coordonnées (aux points F_1 (c; 0) et F_2 ($-c$; 0)), l'équation de l'ellipse prend sa forme la plus simple appelée forme *canonique*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ici, a est le demi *grand* axe, b le demi *petit* axe ; c étant la demi-distance des foyers, les grandeurs a, b, c sont liées par la relation

$$a^2 = b^2 + c^2 \ (c = \sqrt{a^2 - b^2}).$$

La configuration de l'ellipse (le degré d'aplatissement) est caractérisée par son *excentricité* $e = \frac{c}{a}$ (vu que $c < a$, on a toujours $e < 1$).

Les distances d'un certain point M de l'ellipse à ses foyers sont appelées *rayons vecteurs focaux* de ce point et sont d'habitude notées r_1 et r_2 (en vertu de la définition de l'ellipse, $r_1 + r_2 = 2a$ pour n'importe lequel de ses points).

Dans le cas où $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$, les foyers se confondent en un point appelé centre), l'ellipse se transforme en un cercle (l'équation de ce cercle est $x^2 + y^2 = a^2$).

La disposition réciproque d'un point M $(x_1;\ y_1)$ et d'une ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=$ $=1$ est déterminée par les conditions suivantes:

1) si $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, le point M se trouve sur l'ellipse;

2) si $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$, le point M se situe à l'extérieur de l'ellipse;

3) si $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, le point M est un point intérieur à l'ellipse.

Les rayons vecteurs focaux sont exprimés par l'abscisse du point correspondant à l'aide des formules ci-après: $r_1=a-ex$ (rayon vecteur focal droit); $r_2=a+ex$ (rayon vecteur focal gauche).

141. Former l'équation canonique de l'ellipse passant par les points $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

S o l u t i o n. Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ l'équation cherchée de l'ellipse. Cette équation doit être vérifiée par les coordonnées des points données. Donc

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1 \quad \text{et} \quad \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1.$$

D'où $a^2=10$, $b^2=1$ et l'équation de l'ellipse prend la forme $\frac{x^2}{10}+y^2=1$.

142. Trouver sur l'ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ le point dont la différence des rayons vecteurs est égale à $\frac{32}{5}$.

Réponse. Quatre points $\left(\pm 4,\ \pm\frac{9}{5}\right)$.

143. Trouver la longueur du segment de la perpendiculaire au grand axe de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ élevée dans l'un de ses foyers si ce segment est compris entre le foyer considéré et le point d'intersection de la perpendiculaire et de l'ellipse.

Réponse. $\frac{b^2}{a}$.

144. Former l'équation de la droite qui passe par le foyer gauche et le sommet inférieur de l'ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Réponse. $4x+3y+12=0$.

145. Soit une ellipse rapportée à ses axes, d'excentricité $e=\frac{3}{5}$ et passant par le point M $(1;\ 1)$. Former son équation.

Réponse. $16x^2+25y^2=41$.

146. Déterminer la disposition des points M (7 ; 1), N (—5 ; —4), P (4 ; 5) par rapport à l'ellipse $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$.

Réponse. Le point M se situe à l'extérieur de l'ellipse ; le point N se trouve sur l'ellipse, le point P est un point intérieur à l'ellipse.

147. Trouver l'excentricité d'une ellipse si son segment focal (segment compris entre ses foyers) est vu depuis le sommet supérieur sous un angle α.

Réponse. $e = \sin\frac{\alpha}{2}$.

148. Trouver sur la droite $x + 5 = 0$ un point qui soit équidistant du foyer gauche et du sommet supérieur de l'ellipse $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$.

Réponse. M (—5 ; 7).

149. En utilisant la définition de l'ellipse, former son équation si l'on sait que les points F_1 (0 ; 0) et F_2 (1 ; 1) sont ses foyers et que la longueur de son grand axe est égale à 2.

Réponse. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$.

150. Former l'équation du lieu géométrique des points dont les distances au point A (0 ; 1) sont deux fois inférieures à la distance à la droite $y - 4 = 0$.

Réponse. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

151. Les extrémités d'un segment AB de longueur constante a se déplacent suivant les côtés d'un angle droit. Trouver l'équation de la courbe décrit par le point M qui divise le segment donné dans le rapport 1 : 2.

Réponse. La courbe cherchée est une ellipse. Si l'on dirige les axes de coordonnées suivant les côtés de l'angle droit (le point A se trouve sur l'axe Ox), l'équation de notre ellipse s'écrira $9x^2 + 36y^2 = 4a^2$.

3. Hyperbole. L'*hyperbole* est le lieu géométrique des points dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points donnés, appelés foyés, est constante (on la désigne par $2a$) étant toujours inférieure à la distance des deux foyers. Si les foyers de l'hyperbole se trouvent aux points F_1 (c ; 0) et F_2 ($-c$; 0), l'équation de l'hyperbole s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

où $b^2 = c^2 - a^2$; c'est l'équation *canonique* (la plus simple) de l'hyperbole. L'hyperbole se compose de deux branches symétriques par rapport aux axes de coordonnées. Les points A_1 (a ; 0) et A_2 ($-a$; 0) sont les *sommets* de l'hyperbole. Le segment $A_1A_2 = 2a$ est appelé *axe réel* (axe transverse, axe focal) de l'hyperbole, alors que le segment $B_1B_2 = 2b$ représente son *axe imaginaire* (axe non transverse, axe non focal) (fig. 12).

La droite à laquelle la distance du point M (x ; y) de l'hyperbole tend vers zéro pour $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ s'appelle *asymptote*. L'hyperbole a deux asymptotes dont les équations sont $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Pour construire les asymptotes de l'hyperbole, on construit d'abord son rectangle axial de côtés $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Les droites qui passent par les sommets opposés de ce rectangle sont les asymptotes de l'hyperbole. Sur la figure 12 on voit la disposition réciproque de l'hyperbole et de ses asymptotes. Le rapport $e = \frac{c}{a} > 1$ est appelé *excentricité* de l'hyperbole.

Les rayons vecteurs focaux de la branche droite de l'hyperbole sont:
$r_1 = ex - a$ (rayon vecteur focal droit);
$r_2 = ex + a$ (rayon vecteur focal gauche).

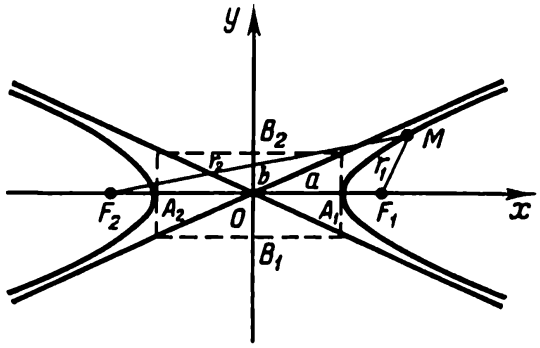


Fig. 12

Les rayons vecteurs focaux de la branche gauche de l'hyperbole sont:
$r_1 = -ex + a$ (rayon vecteur focal droit);
$r_2 = -ex - a$ (rayon vecteur focal gauche).

Si $a = b$, l'équation de l'hyperbole devient $x^2 - y^2 = a^2$. Une telle hyperbole s'appelle hyperbole *équilatère*. Ses asymptotes se coupent à angle droit. Si l'on prend les asymptotes d'une hyperbole équilatère en qualité d'axes de coordonnées, l'équation de cette hyperbole prendra la forme $xy = m$ ($m = \pm\frac{a^2}{2}$; pour $m > 0$, l'hyperbole se situe dans le Ier et le IIIe quadrants; pour $m < 0$, elle se trouve dans le IIe et le IVe quadrants). Vu que l'équation $xy = m$ peut s'écrire $y = \frac{m}{x}$, on arrive à la conclusion qu'une hyperbole équilatère est la représentation graphique de la dépendance inversement proportionnelle des quantités x et y.

L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \left(\text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\right)$$

est aussi l'équation d'une hyperbole dont l'axe réel est représenté par un segment de longueur $2b$ de l'axe Oy.

Les hyperboles $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ont les mêmes demi-axes et les mêmes asymptotes, mais l'axe réel de l'une d'elles sert d'axe imaginaire à l'autre et inversement. On dit que ces deux hyperboles sont *conjuguées*.

152. Trouver sur la branche droite de l'hyperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ un point dont la distance au foyer droit est deux fois moindre que celle au foyer gauche.

S o l u t i o n. Pour la branche droite de l'hyperbole, les rayons vecteurs focaux sont donnés par les formules $r_1 = ex - a$ et $r_2 = ex + a$. Ainsi donc, dans notre cas, on a l'équation $ex + a = 2(ex - a)$, d'où $x = \frac{3a}{e}$; ici, $a = 4$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16+9}}{4} = \frac{5}{4}$, c'est-à-dire $x = 9{,}6$.

L'ordonnée est trouvée en partant de l'équation de l'hyperbole :

$$y = \pm \frac{3}{4}\sqrt{x^2-16} \pm \frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2-16} = \pm \frac{3}{5}\sqrt{119}.$$

De cette façon, les conditions du problème sont vérifiées par deux points :

$$M_1\left(9{,}6\,;\ \frac{3}{5}\sqrt{119}\right) \quad \text{et} \quad M_2\left(9{,}6\,;\ -\frac{3}{5}\sqrt{119}\right).$$

153. On donne deux points $A\,(-1\,;\,0)$ et $B\,(2\,;\,0)$. Soit M un point qui se déplace de façon que l'angle B du triangle AMB reste toujours deux fois plus grand que l'angle A. Trouver l'équation de la courbe décrite par le point M.

S o l u t i o n. En désignant par x et y les coordonnées du point M, exprimons tg B et tg A par les coordonnées des points A, B, M :

$$\operatorname{tg} B = -\frac{y}{x-2} = \frac{y}{2-x}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{y}{x+1}.$$

Suivant la condition imposée par le problème, on forme l'équation $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} 2A$ (étant donné que $B = 2A$), ou $\operatorname{tg} B = \frac{2\operatorname{tg} A}{1-\operatorname{tg}^2 A}$. En portant dans cette égalité les expressions trouvées de tg B et tg A en fonction des coordonnées du point M, on aboutit à l'équation

$$\frac{y}{2-x} = \frac{2\cdot\frac{y}{x+1}}{1-\frac{y^2}{(1+x)^2}}.$$

En simplifiant par y ($y \neq 0$) et en effectuant les réductions qui s'imposent, on trouve $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. La courbe cherchée est une hyperbole.

154. Soit une hyperbole d'excentricité $\sqrt{2}$. Former l'équation la plus simple de cette hyperbole si l'on sait qu'elle passe par le point $M\,(\sqrt{3}\,;\,\sqrt{2})$.

S o l u t i o n. D'après la définition de l'excentricité, on peut écrire l'égalité $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, ou $c^2 = 2a^2$. Mais $c^2 = a^2 + b^2$, donc, $a^2 + b^2 = 2a^2$, ou $a^2 = b^2$, ce qui signifie que l'hyperbole est équilatère.

L'autre égalité est obtenue en utilisant la condition qui situe le point M sur l'hyperbole, c'est-à-dire $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2}-\frac{(\sqrt{2})^2}{b^2}=1$, ou $\frac{3}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1$. Vu que $a^2=b^2$, on obtient $\frac{3}{a^2}-\frac{2}{a^2}=1$, c'est-à-dire $a^2=1$. De cette façon, l'équation de l'hyperbole cherchée est de la forme

$$x^2-y^2=1.$$

155. Former l'équation de l'hyperbole qui passe par le point $M(9;8)$ si ses asymptotes sont définies par les équations $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

Réponse. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$.

156. Trouver l'équation de l'hyperbole dont les sommets et les foyers occupent respectivement les foyers et les sommets de l'ellipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$.

Réponse. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

157. Soit une droite passant par le point $M(0;-1)$ et par le sommet droit de l'hyperbole $3x^2-4y^2=12$. Trouver le second point d'intersection de cette droite et de l'hyperbole donnée.

Réponse. $N(-4;-3)$.

158. On donne l'hyperbole $x^2-y^2=8$. Trouver l'ellipse homofocale qui passe par le point $M(4;6)$.

Réponse. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

159. On donne l'ellipse $9x^2+25y^2=1$. Ecrire l'équation de l'hyperbole équilatère homofocale.

Réponse. $x^2-y^2=\frac{8}{225}$.

160. L'angle des asymptotes d'une hyperbole est de 60°. Calculer l'excentricité de l'hyperbole.

Réponse. $e=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

161. Trouver sur la branche gauche de l'hyperbole $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ le point dont le rayon vecteur focal droit soit égal à 18.

Réponse. $M(-8;0)$.

162. Former l'équation de l'hyperbole d'excentricité 2 et dont les foyers se confondent avec les foyers de l'ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Réponse. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

163. Trouver les rayons vecteurs de l'hyperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ aux points où elle rencontre le cercle $x^2 + y^2 = 91$.

Réponse. 6 ; 14.

164. Montrer que la longueur de la perpendiculaire abaissée du foyer sur l'une des asymptotes d'une hyperbole est égale à son demi-axe imaginaire.

165. Montrer que le produit des distances de tout point de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ à ses asymptotes est une grandeur constante.

166. Trouver l'équation du lieu géométrique des points équidistants du cercle $x^2 + 4x + y^2 = 0$ et du point M (2 ; 0).

Réponse. C'est la branche droite de l'hyperbole $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

4. Parabole. La *parabole* est le lieu géométrique des points équidistants d'un point donné, appelé *foyer*, et d'une droite donnée, appelée *directrice*. Si la directrice d'une parabole est représentée par la droite $x = -\frac{p}{2}$, tandis que son foyer se situe au point $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, alors son équation s'écrit

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Cette parabole est symétrique par rapport à l'axe des abscisses (voir fig. 13, où $p > 0$).

L'équation

$$x^2 = 2py \qquad (2)$$

définit une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Lorsque $p > 0$, les paraboles (1) et (2) sont dirigées dans le sens positif de l'axe correspondant, alors que pour $p < 0$, elles sont dirigées dans le sens négatif.

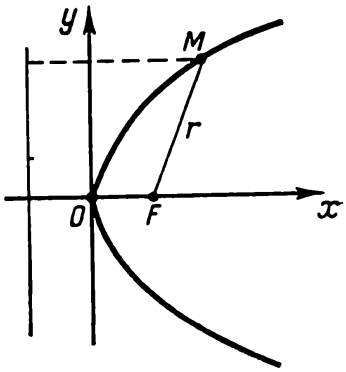


Fig. 13

La longueur du rayon vecteur focal de la parabole $y^2 = 2px$ est donnée par la formule $r = x + \frac{p}{2}$ $(p > 0)$.

167. Former l'équation d'une parabole symétrique par rapport à l'axe Ox et ayant son sommet à l'origine des coordonnées si la longueur d'une certaine corde de cette parabole perpendiculaire à l'axe Ox est égale à 16, tandis que la distance de cette corde au sommet de la parabole est égale à 6.

S o l u t i o n. La longueur de la corde et sa distance au sommet de la parabole étant connues, il s'ensuit que les coordonnées de l'extrémité (point M) de cette corde qui se situe sur la parabole sont aussi connues. L'équation de la parabole est de la forme $y^2 = 2px$. En y mettant $x = 6$, $y = 8$, on trouve $8^2 = 2p \cdot 6$, d'où $2p = \frac{32}{3}$.

De cette façon, l'équation de la parabole cherchée s'écrit $y^2 = \frac{32}{3}x$.

168. Former l'équation d'une parabole symétrique par rapport à l'axe Oy, ayant le sommet à l'origine des coordonnées et déterminant sur la bissectrice du Ier et du IIIe quadrants une corde de longueur $8\sqrt{2}$.

Solution. L'équation cherchée de la parabole s'écrit $x^2 = 2py$, tandis que l'équation de la bissectrice est $y = x$. Donc, les points d'intersection de la parabole avec la bissectrice seront O (0; 0) et M ($2p$; $2p$).

La longueur de la corde est déterminée comme la distance de deux points: $8\sqrt{2} = \sqrt{4p^2 + 4p^2}$, d'où $2p = 8$. Il en découle que l'équation de la parabole cherchée est de la forme $x^2 = 8y$.

169. Former l'équation la plus simple d'une parabole si l'on sait que son foyer se situe au point d'intersection de la droite $4x - 3y - 4 = 0$ et de l'axe Ox.

Réponse. $y^2 = 4x$.

170. Trouver sur la parabole $y^2 = 8x$ un point dont la distance à la directrice de cette parabole est égale à 4.

Réponse. M_1 (2; 4), M_2 (2; —4).

171. Former l'équation d'une parabole ayant son sommet à l'origine des coordonnées, symétrique par rapport à l'axe Ox et qui coupe sur la droite $y = x$ une corde de longueur $4\sqrt{2}$.

Réponse. $y^2 = 4x$; $y^2 = -4x$.

172. La parabole $y^2 = 2x$ coupe sur la droite passant par l'origine des coordonnées une corde de longueur $\frac{3}{4}$. Former l'équation de cette droite.

Réponse. $y = \pm 2\sqrt{2}x$.

173. Former l'équation la plus simple d'une parabole si sa corde, qui est perpendiculaire à l'axe de symétrie et qui divise en deux parties égales la distance comprise entre le foyer et le sommet de la parabole, est égale à 1.

Réponse. $y^2 = 2x$.

174. Trouver sur la parabole $y^2 = 32x$ le point dont la distance à la droite $4x + 3y + 10 = 0$ est égale à 2.

Réponse. M (0; 0), M_1 (18; —24).

175. Former l'équation d'une parabole symétrique par rapport à l'axe Ox, ayant le sommet à l'origine des coordonnées et passant par le point M (4; 2); déterminer l'angle α formé par le rayon vecteur focal de ce point avec l'axe Ox.

Réponse. $y^2 = x$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$.

§ 4. Transformation de coordonnées et réduction des équations des courbes du second degré (des coniques)

1. Transformation de coordonnées. Lorsqu'on passe d'un système de coordonnées xOy à un nouveau système $x'O_1y'$ (le sens des axes de coordonnées reste inchangé, tandis que l'origine des coordonnées change d'emplacement pour se situer en O_1 $(a;\ b)$; voir fig. 14), les nouvelles coordonnées d'un certain point M du plan sont liées aux anciennes par les relations

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = x - a. \\ y' = y - b. \end{cases}$$

Le premier couple de formules sert à exprimer les anciennes coordonnées par les nouvelles, alors que le second couple exprime les nouvelles coordonnées par celles anciennes.

Lors de la rotation des axes de coordonnées d'un certain angle α (l'origine des coordonnées reste inchangée, l'angle α étant compté dans le sens inverse

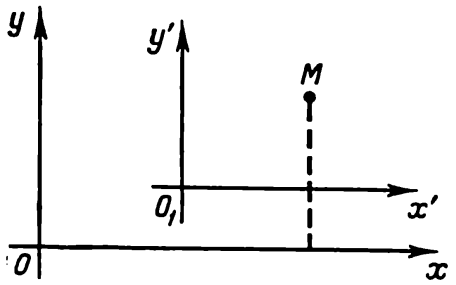


Fig. 14

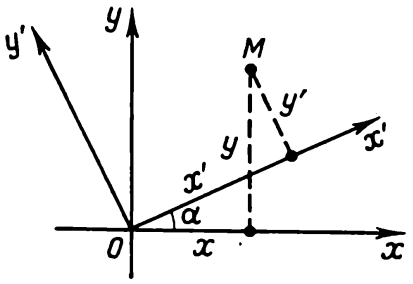


Fig. 15

des aiguilles d'une montre; voir fig. 15), la dépendance entre les coordonnées anciennes $(x;\ y)$ et celles nouvelles $(x';\ y')$ est donnée par les formules:

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \\ y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha. \end{cases}$$

176. Les axes de coordonnées subissent un déplacement parallèle de façon que le nouvel emplacement de l'origine se situe au point O_1 $(3;\ -4)$. On connaît les coordonnées anciennes du point M $(7;\ 8)$. Déterminer les nouvelles coordonnées de ce même point.

Solution. Ici

$$a = 3, \quad b = -4, \quad x = 7, \quad y = 8$$

Etant donné que $x' = x - a$, $y' = y - b$, alors $x' = 7 - 3 = 4$, $y' = 8 - (-4) = 12$.

177. On donne le point M $(4;\ 3)$ situé dans le plan xOy. Le système de coordonnées est tourné autour de son origine de façon que le nouvel axe Ox' passe par le point M. Trouver les anciennes coordonnées d'un certain point A si l'on sait que ses nouvelles coordonnées sont $x' = 5$, $y' = 5$.

Solution. Vu que $OM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, on a $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; ainsi, on obtient les formules de transformation des coordonnées :

$$x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y',$$

$$y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'.$$

En mettant $x' = y' = 5$, on trouve $x = 1$, $y = 7$.

178. Le système de coordonnées est tourné de l'angle $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Trouver les nouvelles coordonnées du point $M(\sqrt{3}; 3)$.

Solution. En appliquant les formules correspondantes, on trouve :

$$x' = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

$$y' = -\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} + 3\cdot\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

179. On donne le point $M\left(3\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}\right)$. On prend en qualité de nouveaux axes les droites $2x - 1 = 0$ (axe O_1y'), $2y - 5 = 0$ (axe O_1x'). Trouver les coordonnées du point M dans le nouveau système de coordonnées.

Réponse. (3; 2).

180. On donne le point $M(4\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$. On prend en qualité de nouveaux axes les droites $y = 2x$ (axe des abscisses) et $y = -\frac{1}{2}x$ (axe des ordonnées) telles qu'elles forment des angles aigus avec les anciens axes correspondants. Trouver les coordonnées du point M dans le nouveau système.

Réponse. (8; —6).

2. Parabole $y = Ax^2 + Bx + C$ et hyperbole $y = \frac{kx+l}{px+q}$. Une équation

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

peut être mise sous forme de l'équation canonique d'une parabole par une transformation de coordonnées, précisément, par le déplacement parallèle des axes avec l'utilisation des formules $x = x' + a$, $y = y' + b$ (a et b sont les coordonnées de la nouvelle origine, tandis que x' et y' représentent les nouvelles coordonnées courantes).

Une parabole définie par l'équation $y = Ax^2 + Bx + C$ admet comme axe de symétrie une droite parallèle à l'axe Oy (d'une façon analogue, l'équation $x = Ay^2 + By + C$ définit une parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe Ox).

La fonction homographique

$$y = \frac{kx+l}{px+q}$$

définit une hyperbole équilatère si $kq - pl \neq 0$, $p \neq 0$; en effectuant une transformation de coordonnées par déplacement parallèle des axes, on ramène cette équation à la forme canonique d'une hyperbole équilatère $xy = m$ admettant comme asymptotes les axes de coordonnées. Pour $m > 0$, les branches de l'hyperbole se situent dans le Ier et le IIIe quadrants, alors que pour $m < 0$, elles se trouvent dans le IIe et le IVe.

181. Mettre sous sa forme canonique l'équation de la parabole $y = 9x^2 - 6x + 2$.

Solution. Substituons à x et à y respectivement $x' + a$ et $y' + b$:

$$y' + b = 9(x' + a)^2 - 6(x' + a) + 2,$$

ou

$$y' = 9'^2 + 6x'(3a - 1) + (9a^2 - 6a + 2 - b).$$

Trouvons pour a et b des valeurs telles que le coefficient de x' et le terme connu s'annulent: $3a - 1 = 0$, $9a^2 - 6a + 2 - b = 0$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$. Donc, l'équation canonique de notre parabole est de la forme $x'^2 = \frac{1}{9}y'$. Le sommet de la parabole se trouve au point $O_1\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ et $p = \frac{1}{18}$.

Une autre méthode de résolution des problèmes de ce type consiste dans la mise de l'équation $y = Ax^2 + Bx + C$ (ou $x = Ay^2 + By + C$) sous la forme $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ [respectivement, $(y - b)^2 = 2p(x - a)$]. Dans ce cas, le point $O_1(a; b)$ sera le sommet de la parabole, alors que le signe du paramètre p indiquera dans quel sens (positif ou négatif) de l'axe respectif (Oy ou Ox) est dirigée la parabole.

Ainsi, l'équation $y = 9x^2 - 6x + 2$ peut s'écrire $y = 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 1 + 2$, ou encore $y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$, ou finalement, $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(y - 1)$.

On voit à nouveau que le sommet de la parabole se situe au point $O_1\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, que son paramètre $p = \frac{1}{18}$ et que ses branches sont dirigées dans le sens positif de l'axe Oy.

182. Mettre l'équation de l'hyperbole $y = \frac{4x+5}{2x-1}$ sous la forme $x'y' = k$. Trouver les équations des asymptotes de l'hyperbole dans l'ancien système de coordonnées.

Solution. En translatant les axes de coordonnées, on écrit l'équation donnée comme suit:

$$(y' + b)(2x' + 2a - 1) = 4x' + 4a + 5,$$

ou

$$2x'y' + (2b - 4)\,x' + (2a - 1)\,y' = 4a + b - 2ab + 5.$$

Trouvons a et b à partir des relations $2b - 4 = 0$, $2a - 1 = 0$. Donc, $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$. Alors l'équation de l'hyperbole dans le nouveau système de coordonnées prendra la forme $x'y' = \frac{7}{2}$. Les nouveaux axes de coordonnées sont les asymptotes de l'hyperbole, donc leurs équations sont $x' = \frac{1}{2}$, $y' = 2$.

Une autre méthode de résolution de ce type de problèmes réside dans la mise de l'équation $y = \frac{kx+l}{px+q}$ sous la forme $(x - a) \times \times (y - b) = m$; le centre de l'hyperbole se trouve au point O_1 $(a\,;\,b)$, ses asymptotes sont représentées par les droites $x = a$ et $y = b$, alors que le signe de m définit toujours dans quels angles formés par asymptotes sont disposées les branches de l'hyperbole.

Etant donné que l'équation $y = \frac{4x+5}{2x-1}$ peut s'écrire $2\left(x - \frac{1}{2}\right) \times \times y - 4\left(x - \frac{1}{2} + \frac{7}{4}\right) = 0$, ou $(2x - 1)\,y - (4x + 5) = 0$, c'est-à-dire $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(y - 2) = 7$. De cette façon, l'équation de l'hyperbole est ramenée à la forme $\left(x - \frac{1}{2}\right)(y - 2) = \frac{7}{2}$, son centre se situe au point $O_1\left(\frac{1}{2}\,;\,2\right)$, tandis que ses branches se trouvent dans le Ier et le IIIe quadrants, étant comprises entre les asymptotes $x - \frac{1}{2} = 0$, $y - 2 = 0$.

183. Mettre sous leurs formes canoniques les équations des paraboles suivantes: a) $y = 4x - 2x^2$; b) $y = -x^2 + 2x + 2$; c) $x = = -4y^2 + y$; d) $x = y^2 + 4y + 5$.

Réponse. a) $O_1(1\,;\,2)$, $p = -\frac{1}{4}$; $x'^2 = -\frac{1}{2}y'$; b) $O_1(1\,;\,3)$, $p = -\frac{1}{2}$; $x'^2 = -y'$; c) $O_1\left(\frac{1}{16}\,;\,\frac{1}{8}\right)$, $p = -\frac{1}{8}$; $y'^2 = -\frac{1}{4}x'$; d) $O_1(1\,;\,-2)$, $p = \frac{1}{2}$; $y'^2 = x'$.

184. Mettre les équations des hyperboles ci-dessous sous la forme $x'y' = m$: a) $y = \frac{2x}{4x-1}$; b) $y = \frac{2x+3}{3x-2}$; c) $y = \frac{10x+2}{5x+4}$; d) $y = \frac{4x+3}{2x+1}$.

Réponse. a) $x'y' = \frac{1}{8}$; b) $x'y' = \frac{13}{9}$; c) $x'y' = -\frac{6}{5}$; d) $x'y' = \frac{1}{2}$.

3. Equation à cinq termes d'une courbe du deuxième degré. L'équation du sec ond degré du type

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(on remarque l'absence du terme contenant le produit des coordonnées xy) est appelée *équation à cinq termes d'une courbe du deuxième degré*. Elle définit dans le plan xOy une ellipse, une hyperbole ou une parabole (la décomposition et la dégénération de ces courbes sont possibles) dont les axes de symétrie sont parallèles aux axes de coordonnées en fonction du signe du produit des coefficients A et C.

1. Si $AC > 0$, la courbe définie par cette équation sera une ellipse (réelle, imaginaire ou dégénérée en un point); si $A = C$, l'ellipse se transforme en cercle.

2. Si $AC < 0$, la courbe correspondante sera une hyperbole qui peut dégénérer en deux droites concourantes dans le cas où le premier membre de l'équation se décompose en le produit de deux facteurs linéaires:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2).$$

3. Si $AC = 0$ (c'est-à-dire si $A = 0$, $C \neq 0$, ou si $C = 0$, $A \neq 0$), l'équation définit une parabole qui peut dégénérer en deux droites parallèles (réelles distinctes, réelles confondues ou imaginaires) dans le cas où le premier membre ne contient pas de terme en y ou en x (c'est-à-dire si l'équation est de la forme $Ax^2 + 2Dx + F = 0$, ou $Cy^2 + 2Ey + F = 0$).

Il est aisé de déterminer le type de la courbe et son emplacement dans le plan en mettant l'équation sous la forme $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = f$ (dans le cas où $AC > 0$ ou $AC < 0$); le type d'équation obtenu permet aussi de juger de la décomposition ou de la dégénération de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Si les courbes ne sont pas dégénérées, l'équation obtenue de l'ellipse ou de l'hyperbole peut être mise sous la forme canonique en déplaçant l'origine des coordonnées au point $O_1(x_0;\ y_0)$.

Le cas où $AC = 0$ a été examiné en détail au paragraphe précédent, car l'équation de la parabole non dégénérée peut, dans ce cas, s'écrire $y = a_1x^2 + b_1x + c$, ou $x = a_1y^2 + b_1y + c_1$.

185. Quelle est la ligne définie par l'équation $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$?

S o l u t i o n. Transformons cette équation de la façon suivante:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4,$$
$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4,$$
$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = -4 + 4 + 36,$$
$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

Déplaçons les axes de coordonnées de façon qu'ils restent parallèles à eux-mêmes et prenons en qualité de nouvelle origine le point $O'(1;\ 2)$.

Appliquons les formules de transformation des coordonnées

$$x = x' + 1, \qquad y = y' + 2.$$

L'équation de la courbe par rapport aux nouveaux axes s'écrira $4x'^2 + 9y'^2 = 36$, ou $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$. On voit donc que la courbe donnée est une ellipse.

186. Quelle est la ligne définie par l'équation $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$?

Solution. Transformons cette équation comme suit :

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 44,$$

$$(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 44 + 1 - 36, \quad (x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 9.$$

Effectuons une translation des axes de coordonnées et prenons comme nouvelle origine le point $O'(-1; 2)$. D'après les formules de transformation des coordonnées, on a

$$x = x' - 1, \quad y = y' + 2,$$

et l'équation s'écrira

$$x'^2 - 9y'^2 = 9, \quad \text{ou} \quad \frac{y'^2}{9} - y'^2 = 1.$$

La courbe en question est une hyperbole dont les asymptotes par rapport aux nouveaux axes de coordonnées sont les droites $y' = \pm\frac{1}{3}x'$.

Trouver les courbes défines par les équations données ci-après. Construire les courbes trouvées.

187. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$.

Réponse. Le cercle $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 1$.

188. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$.

Réponse. L'ellipse $\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1$; la nouvelle origine $O'(1; -1)$.

189. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$.

Réponse. L'hyperbole $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$; la nouvelle origine $O'(2; 3)$.

190. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$.

Réponse. Le point $O'(2; 1)$.

191. $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$.

Réponse. L'ellipse imaginaire $\frac{x'^2}{-1} + \frac{y'^2}{-1/4} = 1$; $x' = x$, $y' = y + 1$.

192. $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$.

Réponse. L'hyperbole $y'^2 - x'^2 = 1$; la nouvelle origine $O'(3; 0)$.

193. $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

Réponse. La parabole $x'^2 = -y'$; la nouvelle origine $O'\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

194. $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Réponse. Deux droites $x = 2$ et $x = 4$ parallèles à l'axe des ordonnées.

195. $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Réponse. Des droites imaginaires.

4. Mise sous forme canonique de l'équation générale d'une courbe du second degré. Si une courbe du second degré est donnée par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

en appliquant les formules de transformation des coordonnées par rotation des axes $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$, $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ et en choisissant convenablement la valeur de α, il faut se débarrasser du terme contenant le produit des coordonnées.

Les transformations suivantes ont été examinées précédemment.

Le cas de la décomposition d'une courbe du second degré en deux droites peut être établi sans difficulté d'après l'équation de départ, en procédant comme suit : on considère l'équation comme une équation quadratique en y (on suppose différent de zéro le coefficient de y^2) et on la résout par rapport à cette variable ; si, dans ce cas, l'expression sous le signe du radical est un carré parfait d'un certain binôme $ax + b$, on peut extraire la racine pour trouver deux valeurs de y : $y_{\mathrm{I}} = k_1x + b_1$; $y_{\mathrm{II}} = k_2x + b_2$, ce qui montre que la courbe se décompose en deux droites.

L'équation donnée peut aussi être résolue par rapport à x. Si, dans l'équation générale d'une courbe du second degré, $A = C = 0$ (il est évident que $B \neq 0$), cette équation définit un couple de droites si, et seulement si, $\frac{B}{D} = \frac{2E}{F}$. Dans ce cas, le premier membre de l'équation se décompose en facteurs linéaires.

196. Montrer que l'équation $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25 = 0$ définit un ensemble de deux droites.

S o l u t i o n. Ecrivons l'équation sous la forme $(3x + 4y)^2 - 25 = 0$. En décomposant le premier membre en facteurs, on obtient $(3x + 4y + 5)(3x + 4y - 5) = 0$.

On voit ainsi que l'équation donnée définit les droites

$$3x + 4y + 5 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 4y - 5 = 0.$$

197. Montrer que l'équation $3x^2 = 8xy - 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$ définit l'ensemble de deux droites.

S o l u t i o n. Ecrivons l'équation comme suit

$$3y^2 - 2(4x - 1)y - (3x^2 - 14x + 8) = 0.$$

Résolvons cette équation par rapport à y :

$$y = \frac{4x - 1 \pm \sqrt{(4x-1)^2 + (9x^2 - 42x + 24)}}{3},$$

ou

$$y = \frac{4x - 1 \pm (5x - 5)}{3}.$$

On obtient les équations des droites $y = 3x - 2$ et $y = \frac{-x+4}{3}$. Ces équations peuvent s'écrire $3x - y - 2 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$.

198. Quelle est la ligne définie par l'équation $xy + 2x - 4y - 8 = 0$?

Solution. Ecrivons l'équation donnée sous la forme $x(y+2)-4(y+2)$, ou $(x-4)(y+2)=0$. De cette façon, on voit que l'équation définit deux droites $x-4=0$ et $y+2=0$ dont l'une est parallèle à l'axe Ox, alors que l'autre l'est à l'axe Oy.

199. Mettre sous forme canonique l'équation

$$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0.$$

Solution. 1) Transformons cette équation à l'aide des formules de transformation des coordonnées par rotation des axes: $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$. On a

$$\begin{gathered}5(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+4(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)\times\\ \times(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+\\ +8(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+14(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+5=0,\end{gathered}$$

ou

$$\begin{gathered}(5\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+8\sin^2\alpha)\,x'^2+\\ +(5\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+8\cos^2\alpha)\,y'^2+\\ +[6\sin\alpha\cdot\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]\,x'y'+\\ +(8\cos\alpha+14\sin\alpha)\,x'+14(\cos\alpha-8\sin\alpha)\,y'+5=0.\end{gathered}$$

Trouvons α de la relation $4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+6\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$, ce qui signifie que l'on égale à zéro le coefficient de $x'y'$. On obtient l'équation $2\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha-2=0$. D'où $\operatorname{tg}\alpha_1=2$, $\operatorname{tg}\alpha_2=-\frac{1}{2}$.

On remarque que les valeurs trouvées de $\operatorname{tg}\alpha$ correspondent à deux directions réciproquement perpendiculaires. C'est pourquoi, en mettant $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$, on ne fait que changer de rôle aux axes x' et y'.

Soit $\operatorname{tg}\alpha=2$, alors $\sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Si l'on prend les valeurs positives de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, l'équation prend la forme

$$9x'^2+4y'^2+\frac{36}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+5=0,$$

ou

$$9\left(x'^2+\frac{4}{\sqrt{5}}x'\right)+4\left(y'^2-\frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right)=-5.$$

2) Complétons les expressions entre parenthèses pour obtenir des carrés parfaits:

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{36}{5}+\frac{1}{20}-5,$$

ou

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

En prenant en qualité de nouvelle origine le point $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$ et en appliquant les formules de transformation des coordonnées

$$x'=x''-\frac{2}{\sqrt{5}},\qquad y'=y''+\frac{1}{4\sqrt{5}};$$

on obtient

$$9x''^2+4y''^2=\frac{9}{4},$$

ou

$$\frac{x''^2}{1/4}+\frac{y''^2}{9/16}=1$$

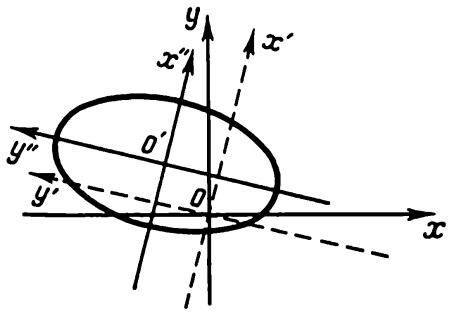


Fig. 16

(c'est l'équation d'une ellipse).

200. Mettre sous sa forme canonique l'équation

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$$

Solution. Ici, $A=0$, $B=3$, $C=4$, $D=-6$, $E=-13$, $F=11$.

1) Transformons cette équation en appliquant les formules de transformation lors de la rotation des axes de coordonnées $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$. On obtient

$$6(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2-12(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)-$$
$$-26(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+11=0,$$

ou

$$(6\sin\alpha\cdot\cos\alpha+8\sin^2\alpha)x'^2+$$
$$+(8\cos^2\alpha-6\sin\alpha\cdot\cos\alpha)y'^2+$$
$$+[16\sin\alpha\cdot\cos\alpha+6(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]x'y'-$$
$$-(12\cos\alpha+26\sin\alpha)x'-(26\cos\alpha-12\sin\alpha)y'+11=0.$$

En égalant à zéro le coefficient de $x'y'$, on a $16\sin\alpha\cdot\cos\alpha+6(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0$, ou $3\operatorname{tg}^2\alpha-8\operatorname{tg}\alpha-3=0$.

D'ici on tire $\operatorname{tg}\alpha_1=3$, $\operatorname{tg}\alpha_2=-\frac{1}{3}$; posons $\operatorname{tg}\alpha=3$, alors $\sin\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. Prenons les valeurs positives de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. Alors l'équation devient

$$9x'^2-y'^2-9\sqrt{10}x'+\sqrt{10}y'+11=0,$$

ou

$$9(x'^2-10x')-(y'^2-10y')=-11.$$

2) Complétons les expressions entre parenthèses de façon à obtenir des carrés parfaits:

$$9\left(x'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(y'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{45}{2}-\frac{5}{2}-11,$$

ou

$$9\left(x'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(y'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=9.$$

En prenant comme nouvelle origine le point $O'\left(\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ et en appliquant les formules de transformation des coordonnées $x'=x''+\frac{\sqrt{10}}{2}$, $y'=y''+\frac{\sqrt{10}}{2}$, on obtient

$$9x''^2-y''^2=9,$$

ou

$$x''^2-\frac{y''^2}{9}=1$$

(c'est l'équation d'une hyperbole).

201. Mettre sous sa forme canonique l'équation

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

S o l u t i o n. 1) Transformons cette équation en effectuant une rotation des axes de coordonnées: $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$. On obtient

$$\begin{aligned}(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2-2(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+\\+(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2-10(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)-\\-6(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+25=0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&(\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha)\,x'^2+\\&+(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)\,y'^2+\\&+2(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\,x'y'-\\&-(10\cos\alpha+6\sin\alpha)\,x'+\\&+(10\sin\alpha-6\cos\alpha)\,y'+25=0.\end{aligned}$$

En égalant à zéro le coefficient de $x'y'$, on a $2(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=0$, d'où $\operatorname{tg}^2\alpha=1$, c'est-à-dire $\operatorname{tg}\alpha_1=1$, $\operatorname{tg}\alpha_2=-1$. Prenons $\operatorname{tg}\alpha=1$, alors $\alpha=\frac{\pi}{4}$ et $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, et l'équation prend la forme

$$2y'^2-8\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}y'+25=0,$$

ou

$$2(y'^2-\sqrt{2}y')-8\sqrt{2}x'+25=0.$$

2) Complétons les expressions entre parenthèses pour obtenir des carrés parfaits :

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}\,x' - 24,$$

ou

$$\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

En prenant comme nouvelle origine le point $O'\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en appliquant les formules de transformation des coordonnées $x' = x'' - \frac{3}{\sqrt{2}}$, $y' = y'' + \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a

$$y''^2 = 4\sqrt{2}x''$$

(c'est l'équation d'une parabole).

Montrer que les équations ci-après définissent des courbes qui se décomposent en deux droites et trouver les équations de ces droites.

202. $25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0$.

Réponse. L'ensemble de deux droites parallèles $5x + y + 1 = 0$ et $5x + y - 1 = 0$.

203. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$.

Réponse. L'ensemble de deux droites confondues $x + y + 1 = 0$.

204. $8x^2 - 18xy + 9y^2 + 2x - 1 = 0$.

Réponse. L'ensemble de deux droites concourantes $2x - 3y + 1 = 0$, $4x - 3y - 1 = 0$.

Mettre sous leur forme canonique les équations des courbes ci-après.

205. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$.

Réponse. $\frac{x''^2}{30} + \frac{y''^2}{5} = 1$.

206. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

Réponse. $\frac{x''^2}{9} - \frac{y''^2}{36} = 1$.

207. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

Réponse. $y''^2 = -2x''$.

§ 5. Déterminants d'ordre 2 et 3 et systèmes d'équations linéaires à deux et trois inconnues

1. Déterminant d'ordre 2. On appelle *déterminant d'ordre 2* du tableau d'éléments

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

le nombre $a_1b_2 - a_2b_1$. Un déterminant d'ordre 2 se représente

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

De cette façon,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Soit un système de deux équations linéaires à deux inconnues

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

si son déterminant $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, ce système n'a qu'une seule solution donnée par les formules

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

(*formules de Cramer*).

Si le déterminant $D = 0$, le système est soit incompatible $\left(\text{lorsque } D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ et } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$, soit indéterminé (lorsque $D_x = D_y = 0$). Dans ce dernier cas, le système se ramène à une seule équation (par exemple, à la première), la deuxième n'étant qu'une équation dépendant de la première.

La condition d'incompatibilité du système peut s'écrire $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, tandis que celle d'indétermination est $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Une équation linéaire est appelée *homogène* si son terme constant est nul.

Examinons un système de deux équations linéaires homogènes à trois inconnues:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0. \end{cases}$$

1) Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, le système se réduit à une seule équation (par exemple, à la première) qui permet d'exprimer l'une des inconnues à l'aide des deux autres dont les valeurs restent arbitraires.

2) Si la condition $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ n'est pas remplie, les solutions du système sont données par les formules

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot t; \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot t,$$

où t peut prendre n'importe quelle valeur. Ces solutions peuvent être mises sous forme de proportion

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = -\frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = t.$$

Lorsque les solutions ont la forme ci-dessus, il faut se rappeler que si l'un des dénominateurs s'annule, le numérateur correspondant doit aussi être égalé à zéro.

208. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab, \\ (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2). \end{cases}$$

Solution. On trouve le déterminant du système et ceux figurant aux numérateurs des formules de Cramer :

$$D=\begin{vmatrix} a+b & -(a-b) \\ a-b & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 4ab & -(a-b) \\ 2(a^2-b^2) & a+b \end{vmatrix}=4a^2b+4ab^2+2a^3-2a^2b-$$
$$-2ab^2+2b^3=2(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=2(a^2+b^2)(a+b).$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a+b & 4ab \\ a-b & 2(a^2-b^2) \end{vmatrix}=2a^3+2a^2b-2ab^2-2b^3-$$
$$-4a^2b+4ab^2=2(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=2(a^2+b^2)(a-b).$$

D'où l'on a

$$x=\frac{D_x}{D}=a+b, \quad y=\frac{D_y}{D}=a-b.$$

209. Résoudre le système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} 3x+4y+5z=0, \\ x+2y-3z=0. \end{cases}$$

Solution. En appliquant les formules mentionnées plus haut, on trouve

$$x=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=-22t,$$

$$y=-\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=14t,$$

$$z=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot t=2t,$$

où l'on peut donner à t n'importe quelle valeur.

210. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 5x-3y=1, \\ x+11y=6. \end{cases}$$

Réponse. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

211. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 2x+y=\frac{1}{5}, \\ 4x+2y=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Réponse. Le système est impossible (il n'a pas de solutions).

212. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} ax-by=a^2+b^2, \\ bx+ay=a^2+b^2. \end{cases}$$

Réponse. $x = a + b$, $y = a - b$.

213. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 3x+2y=\frac{1}{6}, \\ 9x+6y=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Réponse. Le système est indéterminé, car il possède une infinité de solutions : x reste arbitraire, alors que $y = \frac{1}{12} - \frac{3}{2}x$.

214. Résoudre le système d'équations homogènes

$$\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 3x-5y+2z=0. \end{cases}$$

Réponse. $x = y = z = t$.

215. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x\cdot\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos 2\alpha, \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha. \end{cases}$$

Réponse. $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

216. Résoudre le système d'équations homogènes

$$\begin{cases} a^2x-2(a^2+b^2)y+b^2z=0, \\ 2x+2y-3z=0. \end{cases}$$

Réponse. $x = 2t$, $y = t$, $z = 2t$.

2. Déterminants d'ordre 3 et systèmes d'équations linéaires. Le *déterminant d'ordre 3* correspondant au tableau d'éléments

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

est déterminé par l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

On appelle *mineur* d'un élément donné d'un déterminant d'ordre 3 le déterminant d'ordre 2 obtenu en supprimant dans le déterminant initial la ligne et la colonne qui contiennent l'élément donné. On appelle *cofacteur* de l'élément donné son mineur multiplié par $(-1)^k$, où k représente la somme des numéros de la ligne et de la colonne contenant l'élément en question.

Ainsi, le signe dont il faut affecter le mineur de l'élément correspondant du déterminant est donné par le tableau ci-dessous

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

En examinant l'égalité mentionnée ci-avant, qui exprime un déterminant d'ordre 3, on voit que son deuxième membre représente la somme de produits des éléments de sa première ligne par leurs cofacteurs.

Le théorème général qui suit est vérifié : un *déterminant d'ordre 3 est égal à la somme de produits des éléments de n'importe quelle de ses lignes ou colonnes par leurs cofacteurs.* Ce théorème permet de calculer la valeur du déterminant en le développant par rapport aux éléments de l'une de ses lignes ou colonnes.

Remarquons que la *somme de produits des éléments figurant dans une ligne quelconque par les cofacteurs des éléments d'une autre ligne parallèle à la ligne initiale est toujours nulle.*

Enumérons les principales propriétés des déterminants d'ordres 2 et 3.

1) *Un déterminant reste invariable si ses lignes sont remplacées par ses colonnes et ses colonnes par les lignes correspondantes.*

2) *Le facteur commun des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) quelconque peut être mis en facteur (par rapport au déterminant).*

3) *Si les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'un déterminant sont respectivement égaux aux éléments d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) de ce déterminant, le déterminant est nul.*

4) *La transposition de deux lignes (ou de deux colonnes) d'un déterminant entraîne le remplacement de ce déterminant par son opposé.*

5) *Un déterminant reste invariable si l'on ajoute aux éléments de l'une de ses lignes (ou de ses colonnes) les éléments correspondants d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) multipliés par le même nombre* (théorème de la combinaison linéaire des lignes parallèles d'un déterminant).

La solution d'un système de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

est trouvée par les formules de Cramer

$$x=\frac{D_x}{D}, \qquad y=\frac{D_y}{D}, \qquad z=\frac{D_z}{D},$$

où

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Dans ce cas, l'on suppose $D \neq 0$. (Si $D = 0$, le système de départ est soit indéterminé, soit incompatible.)

Si le système est homogène, c'est-à-dire s'il est de la forme

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{cases}$$

et

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

il a une solution unique $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Si le déterminant d'un système homogène

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ce système se ramène soit à deux équations indépendantes (la troisième équation étant dépendante), soit à une seule équation (les deux autres étant des équations dépendantes). Le premier cas se rencontre lorsque parmi les mineurs du déterminant du système homogène un au moins est différent de zéro; le deuxième cas se présente lorsque tous les mineurs de ce déterminant sont nuls.

Dans les deux cas (cf. p. 1), le système homogène aura une infinité de solutions.

217. Calculer le déterminant d'ordre 3

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Solution. On a

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68.$$

Ici, on a utilisé le développement du déterminant par rapport aux éléments de sa première ligne.

218. Calculer le déterminant du problème 217 en appliquant le théorème de la combinaison linéaire des éléments des lignes (des colonnes) d'un déterminant.

Solution. Ajoutons aux éléments de la première ligne les éléments correspondants de la deuxième ligne multipliés par 5, et aux éléments de la troisième ligne les éléments correspondants de la deuxième ligne multipliés par 7:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}.$$

En développant le déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 13\cdot 34 - 17\cdot 22 = 68.$$

219. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

Solution. On a

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{8\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{28}{14} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{42}{14} = 3.$$

220. Résoudre le système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} 4x + y + z = 0, \\ x + 3y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Solution. Ici,

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons aux éléments de la première ligne ceux de la troisième multipliés par —4, et aux éléments de la deuxième ligne ceux de la

troisième multipliés par -1 :

$$D=\begin{vmatrix}0 & -3 & -7\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-3 & -7\\ 2 & -1\end{vmatrix}=17.$$

Etant donné que $D \neq 0$, la solution du système est nulle $x = y = z = 0$.

221. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases}3x+2y-z=0,\\ x+2y+9z=0,\\ x+y+2z=0.\end{cases}$$

Solution. On a

$$D=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 9\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2 & 9\\ 1 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 9\\ 1 & 2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-15+14+1=0.$$

Il s'ensuit que les solutions du système sont différentes de zéro. On résout d'abord le système formé par les deux premières équations (la troisième équation est une équation dépendante des deux premières) :

$$\begin{cases}3x+2y-z=0,\\ x+2y+9z=0.\end{cases}$$

D'ici, on a

$$x=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 9\end{vmatrix}\cdot t=20t,\quad y=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 9\end{vmatrix}\cdot t=-28t,\quad z=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\cdot t=4t.$$

222. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 7 & 2\\ 2 & 3 & -7\end{vmatrix},$$

en le développant par rapport aux éléments de sa troisième ligne.

Réponse. 0.

223. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\end{vmatrix},$$

en appliquant le théorème de la combinaison linéaire des lignes (des colonnes).

Réponse. 2.

224. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}.$$

Réponse. $2(ad - bc)$.

225. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Réponse. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

226. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$$

Réponse. $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$.

227. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} -5x + y + z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ x + y - 7z = 0. \end{cases}$$

Réponse. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

228. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

Réponse. $x = t$, $y = 2t$, $z = -3t$.

229. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} ax + by + cz = a - b, \\ bx + cy + az = b - c, \\ cx + ay + bz = c - a, \end{cases}$$

si $a + b + c \neq 0$.

Réponse. $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$.

230. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} ax + by + (a+b)z = 0, \\ bx + ay + (a+b)z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Réponse. $x = t$, $y = t$, $z = -t$.

CHAPITRE II

ALGÈBRE VECTORIELLE

§ 1. Coordonnées rectangulaires dans l'espace. Problèmes fondamentaux

Si l'on donne dans l'espace un système de coordonnées cartésiennes $Oxyz$, un certain point M de cet espace de coordonnées x (abscisse), y (ordonnée), z (cote) se note $M(x;\ y;\ z)$.

La *distance des deux points* $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ et $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ est donnée par la formule

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

En particulier, la *distance d'un point* $M(x;\ y;\ z)$ *à l'origine des coordonnées* O est calculée d'après la formule

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Si le segment compris entre les points $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ et $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ est divisé par un point $C(\bar{x};\ \bar{y};\ \bar{z})$ dans le rapport λ (cf. ch. I, § 1), les coordonnées du point M peuvent être déterminées par les formules

$$\bar{x}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad \bar{y}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\quad \bar{z}=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

En particulier, les *coordonnées du point milieu du segment* AB sont données par les formules

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2};\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2};\quad \bar{z}=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

231. On donne les points $M_1(2;\ 4;\ -2)$ et $M_2(-2;\ 4;\ 2)$. Trouver sur la droite M_1M_2 un point M divisant le segment M_1M_2 dans le rapport $\lambda=3$.

S o l u t i o n. Appliquons les formules de division d'un segment dans un rapport donné:

$$x_M=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{2+3(-2)}{1+3}=-1,$$

$$y_M=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{4+3\cdot 4}{1+3}=4,$$

$$z_M=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\frac{-2+3\cdot 2}{1+3}=1.$$

Donc, le point cherché est le point $M(-1;\ 4;\ 1)$.

232. On donne le triangle $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(5;\ 1;\ -2)$, $C(7;\ 9;\ 1)$. Trouver les coordonnées du point D où la bissectrice de l'angle A coupe le côté CB.

Solution. Trouvons d'abord les longueurs des côtés du triangle qui forment l'angle A :

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=$$
$$=\sqrt{(7-1)^2+(9-1)^2+(1-1)^2}=10.$$
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=$$
$$=\sqrt{(5-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2}=5.$$

Donc, $\frac{CD}{DB}=\frac{10}{5}=2$, car la bissectrice divise le côté CB en parties proportionnelles aux côtés adjacents.

De cette façon,

$$x_D=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot 5}{1+2}=\frac{17}{3},$$
$$y_D=\frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{9+2\cdot 1}{1+2}=\frac{11}{3},$$
$$z_D=\frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda}=\frac{1+2(-2)}{1+2}=-1;$$

et le point cherché est le point $D\left(\frac{17}{3};\frac{11}{3};\ -1\right)$.

233. Trouver sur l'axe Ox un point équidistant des points $A(2;\ -4;\ 5)$ et $B(-3;\ 2;\ 7)$.

Solution. Soit M le point cherché. Il doit vérifier l'égalité $AM=MB$. Etant donné que ce point se situe sur l'axe Ox, ses coordonnées seront $(x;\ 0;\ 0)$, donc

$$AM=\sqrt{(x-2)^2+(-4)^2+5^2},\quad MB=\sqrt{(x+3)^2+2^2+7^2}.$$

Après l'élévation au carré, on a

$$(x-2)^2+41=(x+3)^2+53,$$

ou

$$10x=-17,\ \text{c'est-à-dire}\ x=-1{,}7.$$

De cette façon, le point cherché est $M(-1{,}7;\ 0;\ 0)$.

234. On donne les points $A(3;\ 3;\ 3)$ et $B(-1;\ 5;\ 7)$.

Trouver les coordonnées des points C et D divisant le segment AB en trois parties égales.

Réponse. $C(5/3;\ 11/3;\ 13/3)$, $D(1/3;\ 13/3;\ 17/3)$.

235. On donne le triangle $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(7;\ 10;\ 3)$, $C(-1;\ 3;\ 1)$. Montrer que l'angle A est obtus.

236. Trouver les coordonnées du barycentre du triangle $A(2;\ 3;\ 4)$, $B(3;\ 1;\ 2)$, $C(4;\ -1;\ 3)$.

Réponse. $M(3;\ 1;\ 3)$.

237. Trouver le rapport dans lequel le point M équidistant des points A (3; 1; 4) et B(—4; 5; 3) divise le segment OC de l'axe Oy, si l'on sait que O se confond avec l'origine des coordonnées et que C (0; 6; 0).

Réponse. En deux parties égales.

238. Trouver sur l'axe Oz un point équidistant des points M_1(2; 4; 1) et M_2(—3; 2; 5).

Réponse. M (0; 0; 17/8).

239. Trouver dans le plan xOy un point équidistant des points A (1; —1; 5), B (3; 4; 4), C (4; 6; 1).

Réponse. M(16; —5; 0).

§ 2. Vecteurs. Opérations élémentaires sur les vecteurs

Un vecteur libre **a** (c'est-à-dire un vecteur qui, tout en conservant sa longueur et sa direction, peut être déplacé en n'importe quel point de l'espace) donné dans l'espace de coordonnées $Oxyz$ peut être présenté sous la forme

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Une telle représentation du vecteur **a** est appelée *décomposition suivant les axes de coordonnées* ou *décomposition suivant les vecteurs unités.*

Ici, a_x, a_y, a_z représentent les projections du vecteur **a** sur les axes de coordonnées correspondantes (on les appelle *coordonnées* ou coefficients de décomposition du vecteur **a**), alors que **i**, **j**, **k** sont les vecteurs unités dont la direction coïncide avec le sens positif de l'axe correspondant.

Les vecteurs $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$ et $a_z\mathbf{k}$, dont la somme donne le vecteur **a**, sont appelés *composantes* du vecteur **a** suivant les axes de coordonnées.

La longueur (le module) du vecteur **a** se note a ou $|\mathbf{a}|$ et est calculée d'après la formule

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

La direction du vecteur **a** est déterminée par les angles α, β et γ qu'il fait avec les axes de coordonnées Ox, Oy et Oz. Les cosinus (appelés *cosinus directeurs d'un vecteur*) de ces angles sont donnés par les formules

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Les cosinus directeurs d'un vecteur sont liés par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Si deux vecteurs **a** et **b** sont donnés par leurs composantes dirigées suivant les axes de coordonnées, leurs somme et différence seront déterminées respectivement par les formules

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\mathbf{i} + (a_y + b_y)\,\mathbf{j} + (a_z + b_z)\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x)\,\mathbf{i} + (a_y - b_y)\,\mathbf{j} + (a_z - b_z)\,\mathbf{k}.$$

Il faut se rappeler que la s o m m e de deux vecteurs **a** et **b** dont les origines se confondent est représentée par un vecteur de même origine qui coïncide avec la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont justement les vecteurs **a** et **b**. La d i f f é r e n c e **a** — **b** de ces vecteurs est représentée par un vecteur qui se confond avec la seconde diagonale du même parallélogramme et

dont l'origine et l'extrémité se situent respectivement à l'extrémité du vecteur **b** et à l'extrémité du vecteur **a** (fig. 17).

La somme de n'importe quel nombre de vecteurs peut être trouvée à l'aide de la règle du polygone (fig. 18).

Le produit d'un vecteur **a** par un scalaire m est donné par la formule

$$m\mathbf{a} = ma_x\mathbf{i} + ma_y\mathbf{j} + ma_z\mathbf{k}.$$

Il ne faut pas oublier que les vecteurs **a** et m**a** sont parallèles (colinéaires) et dirigés dans le même sens si $m > 0$ ou en sens opposé si $m < 0$.

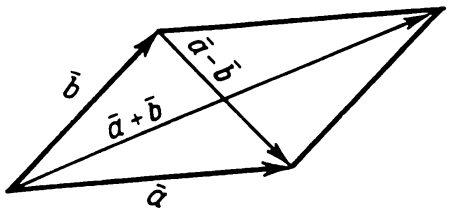


Fig. 17

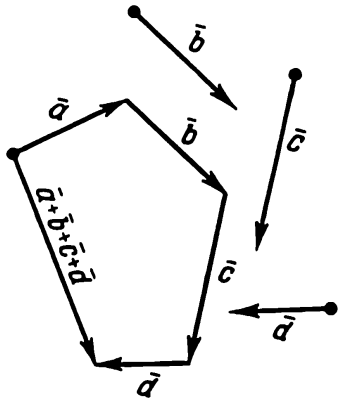


Fig. 18

En particulier, si $m = \frac{1}{a}$, la longueur du vecteur $\frac{\mathbf{a}}{a}$ est égale à l'unité et sa direction coïncide avec celle du vecteur **a**. Ce vecteur est appelé *vecteur unitaire* du vecteur **a** et se note $\mathbf{a}_0$.

De cette façon, $\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{a}$ ou $\mathbf{a} = a\mathbf{a}_0$.

Le vecteur $\overline{OM}$ dont l'origine se confond avec l'origine des coordonnées et dont l'extrémité se situe en un point M $(x;\ y;\ z)$ est appelé *rayon vecteur* du point M et se note **r** (M) ou tout simplement **r**. Vu que ses coordonnées sont les mêmes que celles du point M, sa décomposition suivant les axes de coordonnées s'écrit

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Le vecteur $\overline{AB}$ d'origine A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ et d'extrémité B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ peut s'écrire

$$\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

où $\mathbf{r}_2$ est le rayon vecteur du point B, $\mathbf{r}_1$ étant le rayon vecteur du point A. En vertu de ce qui précède, la décomposition du vecteur $\overline{AB}$ suivant les axes de coordonnées prend la forme

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}.$$

La longueur de ce vecteur est égale à la distance des points A et B :

$$|\overline{AB}| = d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

sa direction étant déterminée par les cosinus directeurs

$$\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{d};\quad \cos\beta = \frac{y_2-y_1}{d};\quad \cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{d}.$$

240. Le côté AB d'un triangle ABC est divisé par les points M et N en trois parties égales : $AM = MN = NB$. Trouver le vecteur $\overline{CM}$ si $\overline{CA} = \mathbf{a}$, $\overline{CB} = \mathbf{b}$.

Solution. On a $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Donc, $\overline{AM} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{3}$. Etant donné que $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, on trouve $\overline{CM} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{3} = \frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$.

241. Dans un triangle ABC la droite AM est la bissectrice de l'angle BAC, le point M se trouvant sur le côté BC. Trouver $\overline{AM}$ si $\overline{AB} = \mathbf{b}$, $\overline{AC} = \mathbf{c}$.

Solution. On a $\overline{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. Selon la propriété de la bissectrice d'un angle intérieur d'un triangle, on a $\frac{BM}{MC} = \frac{b}{c}$ et l'on trouve $\frac{BM}{BC} = \frac{b}{b+c}$. Ainsi, on obtient $\overline{BM} = \frac{b}{b+c}(\mathbf{c} - \mathbf{b})$.

Etant donné que $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, on a $\overline{AM} = \mathbf{b} + \frac{b}{b+c}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \frac{b\mathbf{c}+c\mathbf{b}}{b+c}$.

242. Soient $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ respectivement les rayons vecteurs des sommets d'un triangle ABC. Trouver le rayon vecteur du point d'intersection des médianes de ce triangle.

Solution. On a $\overline{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$; $\overline{BD} = \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{2}$ (D est le point milieu du côté BC) ; $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{2} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1}{2}$; $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AD}$ (M est le point d'intersection des médianes). Pour cette raison, $\overline{AM} = \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1}{3}$; $\mathbf{r} = \overline{OM} = \mathbf{r}_1 + \overline{AM} = \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1}{3} + \mathbf{r}_1$, ou finalement

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}.$$

243. Trouver la longueur du vecteur $\mathbf{a} = 20\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 60\mathbf{k}$ et ses cosinus directeurs.

Solution. On a $a = \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70$, $\cos\alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = -\frac{60}{70} = -\frac{6}{7}$.

244. Trouver le vecteur $\mathbf{a} = \overline{AB}$ si A (1 ; 3 ; 2) et B (5 ; 8 ; —1).

Solution. Les projections du vecteur $\overline{AB}$ sur les axes de coordonnées sont données par les différences des coordonnées correspondantes des points B et A :

$$a_x = 5 - 1 = 4,\ a_y = 8 - 3 = 5,\ a_z = -1 - 2 = -3.$$

Par suite, $\overline{AB} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

245. On donne un triangle ABC. Le point M situé sur le côté BC divise ce dernier de façon que $\frac{BM}{MC} = \lambda$. Trouver $\overline{AM}$ si $\overline{AB} = \mathbf{b}$, $\overline{AC} = \mathbf{c}$.

Réponse. $\overline{AM} = \frac{\mathbf{b}+\lambda\cdot\mathbf{c}}{1+\lambda}$.

246. On donne $\overline{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overline{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overline{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$. Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

247. Trouver les projections du vecteur $\mathbf{a}$ sur les axes de coordonnées si $\mathbf{a} = \overline{AB} + \overline{CD}$, $A\,(0;\ 0;\ 1)$, $B\,(3;\ 2;\ 1)$, $C\,(4;\ 6;\ 5)$, $D\,(1;\ 6;\ 3)$.

Réponse. $a_x = 0$, $a_y = 2$, $a_z = -2$.

248. Trouver le module du vecteur $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + (m+1)\,\mathbf{j} + m\,(m+1)\,\mathbf{k}$.

Réponse. $m^2 + m + 1$.

249. On donne les rayons vecteurs des sommets d'un triangle ABC : $\mathbf{r}_A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_B = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_C = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Montrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

250. Calculer le module du vecteur $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} - \frac{4(\mathbf{i}+2\mathbf{i})+3\mathbf{k}}{5}$ et trouver ses cosinus directeurs.

Réponse. $a = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{2}{3}$.

251. On donne les points $M_1\,(1;\ 2;\ 3)$ et $M_2\,(3;\ -4;\ 6)$. Trouver le module et les cosinus directeurs du vecteur $\overline{M_1M_2}$.

Réponse. $|\overline{M_1M_2}| = 7$; $\cos\alpha = \frac{2}{7}$; $\cos\beta = -\frac{6}{7}$; $\cos\gamma = \frac{3}{7}$.

252. On donne le vecteur $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Trouver le vecteur $\mathbf{b}$ si $b = a$, $b_y = a_y$ et $b_x = 0$.

Réponse. $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ou $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

253. Soit M un point dont le rayon vecteur de module $r = 8$ fait avec l'axe Oy un angle de 60° et avec l'axe Oz un angle de 45°. Trouver les coordonnées du point M si son abscisse est négative.

Réponse. $M\,(-4;\ 4;\ 4\sqrt{2})$.

§ 3. Produits scalaire et vectoriel. Produit mixte

1. Produit scalaire. On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ le produit des modules de ces vecteurs par le cosinus de l'angle φ qu'ils forment entre eux :

$$\mathbf{a}\ \mathbf{b} = ab\cos\varphi.$$

Propriétés du produit scalaire:

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$ ou $\mathbf{a}^2 = a^2$.
2) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = 0$, ou $\mathbf{b} = 0$, ou $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
3) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (loi commutative).
4) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ (loi distributive).
5) $(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ (loi associative par rapport au scalaire).

Produits scalaires des vecteurs unités dirigés suivant les axes de coordonnées:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0.$$

Si

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

alors

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

2. Produit vectoriel. On appelle *produit vectoriel* d'un vecteur **a** par un autre vecteur **b** un troisième vecteur **c** déterminé de la façon suivante (fig. 19):

1) le module du vecteur **c** est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs **a** et **b** ($c = ab \sin\varphi$, où φ est l'angle que forment entre eux les vecteurs **a** et **b**);

2) le vecteur **c** est perpendiculaire aux vecteurs **a** et **b**;

3) lorsque les vecteurs **a**, **b**, **c** sont amenés à avoir même origine, ils sont orientés l'un par rapport aux autres de la même façon que les vecteurs unités **i**, **j**, **k** (dans le système de coordonnées à droite ils forment l'ainsi appelé triplet de vecteurs *à droite*).

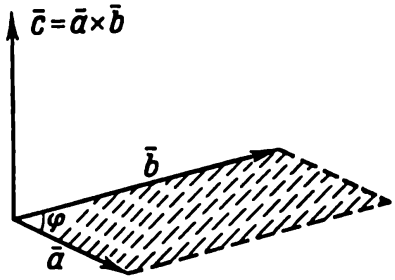


Fig. 19

Le produit vectoriel du vecteur **a** par le vecteur **b** se note $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Propriétés du produit vectoriel:

1) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ce qui signifie que le produit vectoriel n'est pas soumis à la loi commutative.

2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = 0$, ou $\mathbf{b} = 0$, ou $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

3) $(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (propriété associative par rapport au scalaire).

4) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (propriété distributive).

Les produits vectoriels des vecteurs unités **i**, **j**, **k** sont:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

Il est commode de trouver le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ d'après la formule

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

3. Produit mixte. On appelle *produit mixte* des vecteurs **a**, **b** et **c** le produit scalaire du vecteur $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ par le vecteur **c**:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\cdot\mathbf{c}.$$

Le module du produit mixte de trois vecteurs **a**, **b** et **c** est égal au volume du parallélépipède construit sur ces vecteurs.

Propriétés du produit mixte:

1) Le produit mixte de trois vecteurs est nul si:
a) au moins un de ces vecteurs est nul;
b) deux d'entre eux sont parallèles (colinéaires);
c) tous les trois vecteurs sont parallèles à un même plan (ils sont coplanaires).

2) Le produit mixte reste invariable si l'on transpose les signes du produit vectoriel ($\times$) et du produit scalaire ($\cdot$), c'est-à-dire $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. En vertu de cette propriété, on conviendra d'écrire le produit mixte des vecteurs **a**, **b** et **c** sous la forme **abc**.

3) Le produit mixte reste invariable à la suite d'une permutation circulaire des vecteurs à multiplier:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}.$$

4) La transposition de n'importe quel couple de vecteurs n'entraîne qu'un changement de signe du produit mixte:

$$\mathbf{bac} = -\mathbf{abc}; \quad \mathbf{cba} = -\mathbf{abc}; \quad \mathbf{acb} = -\mathbf{abc}.$$

Si les vecteurs sont donnés par leurs composantes dirigées suivant les axes de coordonnées:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}; \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}; \quad \mathbf{c} = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k},$$

alors

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Les propriétés du produit mixte de trois vecteurs permettent de tirer les conclusions suivantes:

a) la condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs soient coplanaires s'écrit: $\mathbf{abc} = 0$;

b) le volume V_1 du parallélépipède construit sur trois vecteurs **a**, **b** et **c** et le volume V_2 de la pyramide triangulaire qu'ils forment sont donnés par les formules:

$$V_1 = |\mathbf{abc}|; \quad V_2 = \frac{1}{6} V_1 = \frac{1}{6} |\mathbf{abc}|.$$

254. Trouver le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solution. On trouve $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 4(-5) + 7 \cdot 2 = 0$. Vu que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, on a $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. 1

255. On donne les vecteurs $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + m\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. Pour quelle valeur de m ces vecteurs sont réciproquement perpendiculaires?

Solution. On trouve le produit scalaire de ces vecteurs $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4m + 3m - 28$; étant donné que $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, on a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, d'où $7m - 28 = 0$, c'est-à-dire $m = 4$.

256. Trouver le produit $(5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$ si $a = 2$, $b = 3$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Solution. On a $(5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 10\mathbf{a}^2 - 5\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3\mathbf{b}^2 = 10a^2 - 3b^2 = 40 - 27 = 13$.

257. Déterminer l'angle des vecteurs $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Solution. Etant donné que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi$, on a $\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}$.

Donc $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3(-2) = 8$, $a = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $b = \sqrt{36+16+4} = 2\sqrt{14}$.

Par suite, $\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$ et $\varphi = \arccos\frac{2}{7}$.

258. Trouver le vecteur unitaire orienté de la même façon que le vecteur $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solution. On trouve le module du vecteur $\mathbf{a}$:

$$a = \sqrt{1+4+4} = 3;$$

vu que $\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{a}$, on a $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$.

259. Trouver le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solution. On a

$$\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\bar{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

260. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

Solution. On trouve le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 14\mathbf{i} - 42\mathbf{j} - 21\mathbf{k}.$$

Vu que le module du produit vectoriel de deux vecteurs est égal à l'aire du parallélogramme construit sur eux, on a $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49$.

261. Calculer l'aire du triangle de sommets $A\,(1;\ 1;\ 1)$, $B\,(2;\ 3;\ 4)$, $C\,(4;\ 3;\ 2)$.

Solution. On trouve les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (2-1)\,\mathbf{i} + (3-1)\,\mathbf{j} + (4-1)\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

$$\overline{AC} = (4-1)\,\mathbf{i} + (3-1)\,\mathbf{j} + (2-1)\,\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

L'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$. C'est pourquoi l'on trouve le produit vectoriel de ces vecteurs

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-4\mathbf{k}.$$

Par suite,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+16}=\sqrt{24}.$$

262. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ et $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$ si $\mathbf{a}=\mathbf{b}=1$, $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=30°$.

Solution. On a

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+\mathbf{b})=3\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+9\mathbf{b}\times\mathbf{a}+3\mathbf{b}\times\mathbf{b}=$$
$$=3\cdot 0+\mathbf{a}\times\mathbf{b}-9\mathbf{a}\times\mathbf{b}+3\cdot 0=-8\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

(comme $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$, il s'ensuit $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$). Donc, $S=8\,|\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,|=8\cdot 1\cdot 1\sin 30°=4$.

263. Trouver le produit mixte des vecteurs $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

Solution. On a

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=$$
$$=26+5+2=33.$$

264. Montrer que les vecteurs $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ sont coplanaires.

Solution. On trouve le produit mixte des vecteurs

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$$
$$=8-15+7=0.$$

Comme $\mathbf{abc}=0$, il s'ensuit que les vecteurs sont coplanaires.

265. Trouver le volume de la pyramide triangulaire dont les sommets se situent aux points A (2; 2; 2), B (4; 3; 3), C (4; 5; 4) et D (5; 5; 6).

Solution. Trouvons les vecteurs $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$ qui se confondent avec les arêtes de la pyramide sortant du point A :

$\overline{AB}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\overline{AC}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\overline{AD}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

On trouve le produit mixte des vecteurs $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 6 - 1\cdot 2 - 1\cdot 3 = 7.$$

Etant donné que le volume de la pyramide constitue 1/6 du volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$, on a $V = 7/6$.

266. Calculer

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})\,(\mathbf{b} - \mathbf{c})\,(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

S o l u t i o n. Le fait que $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$ montre que ces vecteurs sont coplanaires (fig. 20).

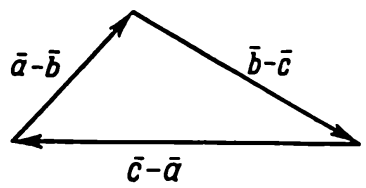


Fig. 20

Il s'ensuit que le produit mixte de ces vecteurs est nul, c'est-à-dire $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\,(\mathbf{b} - \mathbf{c})\,(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$.

267. Trouver le produit scalaire des vecteurs $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ et $5\mathbf{a} - 6\mathbf{b}$ si $a = 4$, $b = 6$ et si l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est égal à $\frac{\pi}{3}$.

Réponse. —96.

268. Déterminer l'angle des vecteurs $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Réponse. $\arccos \frac{17}{50}$.

269. Quelle est la valeur de m pour laquelle les vecteurs $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + \mathbf{j}$ et $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ sont perpendiculaires?

Réponse. $m = 1$.

270. Trouver le produit scalaire des vecteurs $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ et $5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ si $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ et si $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{c}}) = (\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}}) = \frac{\pi}{3}$.

Réponse. 547.

271. Trouver le travail fourni par une force $\mathbf{F}$ sur un chemin $\mathbf{s}$ si $F = 2$, $s = 5$ et si l'angle $\varphi = (\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{s}}) = \frac{\pi}{6}$.

Réponse. Le travail est déterminé d'après la formule $A = Fs\cos\varphi = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$, donc $A = 5\sqrt{3}$.

272. Trouver le vecteur unité perpendiculaire aux vecteurs $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Réponse. $\pm\frac{11}{\sqrt{11}}(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

273. Les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ont le même module et les angles qu'ils forment deux à deux sont égaux entre eux. Trouver le vecteur $\mathbf{c}$ si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Réponse. $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, ou $\mathbf{c} = \frac{1}{3}(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

274. On donne les vecteurs $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Trouver $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ et $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$.

Réponse. $\frac{20}{3}$ et $\frac{20}{7}$.

275. On donne les rayons vecteurs de trois sommets successifs d'un parallélogramme $ABCD$:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{r}_B = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k},\ \mathbf{r}_C = 7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 11\mathbf{k}.$$

Trouver le rayon vecteur du quatrième sommet D.

Réponse. $\mathbf{r}_D = 7\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

276. Montrer que les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ne peuvent pas être réciproquement perpendiculaires si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} > 0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j} > 0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k} > 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{i} < 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{j} < 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{k} < 0$.

277. Montrer que les vecteurs $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + m\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + (m+1)\mathbf{k}$ et $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + m\mathbf{k}$ ne seront pas coplanaires quelle que soit la valeur de m.

278. Est-ce que les nombres différents de zéro x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 peuvent vérifier les équations ci-après

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0,$$
$$x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = 0,$$
$$x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0?$$

Réponse. Ce n'est pas possible, car les vecteurs coplanaires ne peuvent pas être deux à deux perpendiculaires.

279. Trouver le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Réponse. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -17\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

280. Calculer l'aire du triangle de sommets $A\,(2;\ 2;\ 2)$, $B\,(4;\ 0;\ 3)$, $C\,(0;\ 1;\ 0)$.

Réponse. $\frac{1}{2}\sqrt{65}$.

281. Trouver le produit mixte des vecteurs

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Réponse. 4.

282. Montrer que les vecteurs $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sont coplanaires.

283. Calculer le volume de la pyramide triangulaire dont les sommets se situent aux points A (0; 0; 1), B (2; 3; 5), C (6; 2; 3), D (3; 7; 2).

Réponse. 20.

284. Dans le problème précédent, trouver la longueur de la hauteur abaissée sur la face BCD de la pyramide.

Réponse. $\frac{4}{17}\sqrt{510}$.

285. Montrer que les points A (5; 7; —2), B (3; 1; —1), C (9; 4; —4) et D (1; 5; 0) se situent dans un même plan.

CHAPITRE III

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

§ 1. Plans et droites

Plan. 1. L'équation d'un plan sous sa forme vectorielle s'écrit

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p.$$

Ici, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ est le rayon vecteur du point courant $M(x;\ y;\ z)$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ est le vecteur unitaire dirigé suivant la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan (α, β, γ représentent les angles formés par cette perpendiculaire respectivement avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz), p étant la longueur de cette perpendiculaire.

En passant aux coordonnées, on obtient l'*équation normale du plan*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

2. L'équation de tout plan peut aussi s'écrire sous la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

si $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (*équation générale du plan*). Ici, A, B, C peuvent être considérées en tant que coordonnées d'un certain vecteur $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ perpendiculaire au plan. Pour ramener l'équation générale du plan à sa forme normale, tous ses termes doivent être multipliés par le facteur de normalisation

$$\mu = \pm\frac{1}{N} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

où le signe du radical est contraire au signe du terme constant D figurant dans l'équation générale du plan.

3. Cas particuliers de la position que peut occuper un plan défini par l'équation générale $Ax + By + Cz + D = 0$:

$A = 0$, le plan est parallèle à l'axe Ox;
$B = 0$, le plan est parallèle à l'axe Oy;
$C = 0$, le plan est parallèle à l'axe Oz;
$D = 0$, le plan passe par l'origine des coordonnées;
$A = B = 0$, le plan est perpendiculaire à l'axe Oz (il est parallèle au plan xOy);
$A = C = 0$, le plan est perpendiculaire à l'axe Oy (il est parallèle au plan xOz);
$B = C = 0$, le plan est perpendiculaire à l'axe Ox (il est parallèle au plan yOz);
$A = D = 0$, le plan passe par l'axe Ox;
$B = D = 0$, le plan passe par l'axe Oy;
$C = D = 0$, le plan passe par l'axe Oz;
$A = B = D = 0$, le plan se confond avec le plan xOy ($z = 0$);
$A = C = D = 0$, le plan se confond avec le plan xOz ($y = 0$);
$B = C = D = 0$, le plan se confond avec le plan yOz ($x = 0$).

Si le coefficient D figurant dans l'équation générale du plan est différent de zéro, on peut diviser tous les termes par $-D$ et mettre l'équation sous la forme

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$\left(\text{ici, } a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}\right)$. C'est l'*équation du plan exprimé par les segments* qu'il détermine sur les axes de coordonnées, a, b et c étant respectivement l'abscisse du point d'intersection du plan avec l'axe Ox, l'ordonnée du point d'intersection du plan avec l'axe Oy et la cote du point d'intersection du plan avec l'axe Oz.

4. *L'angle* φ *des deux plans* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ et $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ est déterminé par la formule

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Condition pour que ces deux plans soient parallèles:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Condition pour que ces deux plans soient perpendiculaires:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

5. La *distance d'un point* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *à un plan* défini par l'équation $Ax+By+Cz+D=0$ est donnée par la formule

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Cette distance est égale à la valeur absolue du résultat obtenu par la substitution des coordonnées du point dans l'équation normale du plan; le signe du résultat de cette substitution caractérise la disposition réciproque du point et de l'origine des coordonnées par rapport au plan considéré: le signe « + » montre que le point M_0 et l'origine des coordonnées se situent de part et d'autre du plan, alors que le signe « — » indique que ces points sont d'un même côté du plan.

6. L'*équation d'un plan passant par un point* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *et perpendiculaire à un vecteur* $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ est de la forme

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Si A, B et C prennent des valeurs arbitraires, cette équation définit un certain plan qui fait partie des plans concourant au point M_0. C'est pourquoi cette équation est souvent appelée *équation d'une liasse des plans concourants*.

7. L'équation

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

lorsque λ est arbitraire, définit un certain plan passant par la droite suivant laquelle se coupent les plans définis par les équations

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad \text{(I)}$$

et

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \qquad \text{(II)}$$

c'est-à-dire un certain plan appartenant au faisceau de plans passant par cette droite (elle est souvent appelée *équation d'un faisceau de plans*). Si les plans définis par les équations (I) et (II) sont parallèles, le faisceau de plans se transforme en un ensemble de plans parallèles aux plans considérés.

8. Pour trouver l'*équation du plan passant par les trois points* $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$, $M_3(\mathbf{r}_3)$ (ici, $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$), il est commode d'utiliser la condition pour que les vecteurs $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ (ici, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ est le rayon vecteur du point courant M du plan cherché) soient coplanaires:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0,$$

ou en coordonnées

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

286. Mettre sous la forme normale l'équation du plan $2x + 3y - 6z + 21 = 0$.

S o l u t i o n. On trouve le facteur de normalisation (son signe est «—» étant donné que $D = 21 > 0$):

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = -\frac{1}{7}.$$

Ainsi, l'équation normale du plan est de la forme

$$-\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 3 = 0.$$

287. Déterminer la distance du point $M_0(3; 5; -8)$ au plan $6x - 3y + 2z - 28 = 0$.

S o l u t i o n. On utilise la formule de la distance d'un point à un plan (cf. p. 5):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

et l'on trouve

$$d = \frac{|6 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) - 28|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{41}{7}.$$

(La substitution amène à une valeur négative, ce qui signifie que le point donné et l'origine des coordonnées se trouvent d'un même côté du plan considéré.)

288. Trouver l'équation du plan passant par le point $M(2; 3; -1)$ et parallèle au plan $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

S o l u t i o n. Ecrivons l'équation des plans concourants passant par le point donné

$$A(x - 2) + B(y - 3) + C(z + 1) = 0.$$

Pour que le plan cherché soit parallèle au plan donné, il faut que la condition $\frac{A}{5} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{2}$ soit satisfaite, d'où l'on tire $A = 5t$, $B = 3t$, $C = 2t$. Ainsi, l'équation du plan cherché va s'écrire

$$5t(x - 2) - 3t(y - 3) + 2t(z + 1) = 0,$$

ou

$$5x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

On voit sans difficulté que l'on peut prendre dès le commencement $A = 5$, $B = -3$, $C = 2$.

289. Former l'équation du plan passant par le point M (2; —1; 5) et perpendiculaire aux plans $3x - 2y + z + 7 = 0$ et $5x + 4y + 3z + 1 = 0$.

Solution. Ecrivons l'équation du plan cherché sous la forme

$$A(x - 2) + B(y + 1) + C(z - 5) = 0.$$

Vu que ce plan est perpendiculaire aux plans donnés, les conditions

$$3A - 2B + C = 0,$$
$$5A - 4B + 3C = 0$$

doivent être vérifiées. En éliminant les coefficients A, B, C entre les équations du système d'équations ci-dessous

$$\begin{cases} A(x-2)+B(y+1)+C(z-5)=0, \\ 3A-2B+C=0, \\ 5A-4B+3C=0 \end{cases}$$

(on sait qu'un système de trois équations linéaires homogènes à trois inconnues A, B, C admet une solution nulle, car le plan qui satisfait aux conditions imposées existe toujours), on obtient l'équation du plan cherché sous la forme

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x + 2y + z - 5 = 0.$$

290. Former l'équation du plan passant par le point A (5; 4; 3) qui détermine sur les axes de coordonnées des segments ayant la même longueur.

Solution. Utilisons l'équation du plan exprimé par les segments qu'il détermine sur les axes de coordonnées, sachant que $a = b = c$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1.$$

Les coordonnées du point A doivent vérifier l'équation du plan cherché, donc l'égalité $\frac{5}{a} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1$ doit avoir lieu et l'on trouve $a = 12$. On obtient ainsi l'équation $x + y + z - 12 = 0$.

291. Former l'équation du plan passant par la ligne d'intersection des plans $x + y + 5z - 1 = 0$ et $2x + 3y - z + 2 = 0$ et par le point M (3; 2; 1).

Solution. Utilisons l'équation du faisceau de plans

$$x + y + 5z - 1 + \lambda (2x + 3y - z + 2) = 0.$$

La valeur de λ est déterminée en partant du fait que les coordonnées du point M doivent vérifier cette équation:

$$3 + 2 + 5 - 1 + \lambda (6 + 6 - 1 + 2) = 9 + 13\lambda = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{9}{13}.$$

On obtient l'équation cherchée sous la forme

$$x + y + 5z - 1 - \frac{9}{13}(2x + 2y - z + 2) = 0$$

ou, en la multipliant par 13 et en réduisant les termes semblables,

$$5x + 14y - 74z + 31 = 0.$$

292. Former l'équation du plan passant par la ligne d'intersection des plans $x + 3y + 5z - 4 = 0$ et $x - y - 2z + 7 = 0$ et parallèle à l'axe Oy.

Solution. Utilisons l'équation du faisceau de plans $x + 3y + 5z - 4 + \lambda (x - y - 2z + 7) = 0$. Mettons cette équation sous la forme $(1 + \lambda) x + (3 - \lambda) y + (5 - 2\lambda) z + (7\lambda - 4) = 0$.

Etant donné que le plan cherché est parallèle à l'axe des ordonnées, le coefficient de y doit être nul, c'est-à-dire $3 - \lambda = 0$, donc $\lambda = 3$. En portant la valeur de λ dans l'équation du faisceau, on obtient

$$4x - z + 17 = 0.$$

293. Trouver l'équation du plan passant par les points M (2; —1; 4) et N (3; 2; —1) et perpendiculaire au plan $x + y + z - 3 = 0$.

Solution. Utilisons l'équation du plan passant par le premier des points donnés:

$$A (x - 2) + B (y + 1) + C (z - 4) = 0.$$

La condition pour que ce plan passe par le deuxième point et la condition d'orthogonalité sont respectivement déterminées par les égalités

$$A + 3B - 5C = 0,$$
$$A + B + C = 0.$$

En éliminant les coefficients A, B, C entre les équations du système (cf. solution du problème 289)

$$\begin{cases} A(x-2)+B(y+1)+C(z-4)=0, \\ A+3B-4C=0, \\ A+B+C=0, \end{cases}$$

on obtient l'équation cherchée sous la forme

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

ou

$$4x-3y-z-7=0.$$

294. Du point P (2; 3; —5) on abaisse les perpendiculaires sur les plans de coordonnées. Trouver l'équation du plan qui passe par les pieds de ces perpendiculaires.

Solution. Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les plans de coordonnées se situent aux points M_1 (2; 3; 0), M_2 (2; 0; —5), M_3 (0; 3; —5). Ecrivons l'équation du plan passant par les points M_1, M_2, M_3, en utilisant l'équation

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0,$$

ou

$$15y+10y-6z-60=0.$$

295. Former l'équation du plan passant par le point M (2; 3; 5) et perpendiculaire au vecteur $\mathbf{N}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

Solution. Il suffit d'utiliser l'équation d'un plan passant par un point donné et perpendiculaire à un vecteur donné (cf. p. 6):

$$4(x-2)+3(y-3)+2(z-5)=0,$$

c'est-à-dire

$$4x+3y+2z-27=0.$$

296. Mettre sous la forme normale les équations des plans suivants: a) $x + y - z - 2 = 0$; b) $3x + 5y - 4z + 7 = 0$.

Réponse. a) $\frac{x+y-z-2}{\sqrt{3}} = 0$; b) $-\frac{3}{5\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{4}{5\sqrt{2}}z - \frac{7}{5\sqrt{2}} = 0$.

297. Trouver la distance du point M_0 (1; 3; —2) au plan $2x - 3y - 4z + 12 = 0$. Quelle est la disposition du point M_0 par rapport au plan?

Réponse. $d = \frac{13}{\sqrt{29}}$; l'origine des coordonnées et le point M_0 sont de part et d'autre du plan.

298. Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point M_0 (2; 3; —5) sur le plan $4x - 2y + 5z - 12 = 0$.

Réponse. $d = \frac{7\sqrt{5}}{3}$.

299. Trouver l'équation du plan passant: 1) par le point M (—2; 3; 4) et qui détermine des segments de même longueur sur les axes de coordonnées; 2) par le point N (2; —1; 4) et qui détermine sur l'axe Oz un segment deux fois plus long que les segments déterminés sur les axes Ox et Oy.

Réponse. 1) $x + y + z - 5 = 0$; 2) $2x + 2y + z - 6 = 0$.

300. Trouver l'équation du plan passant par les points P (2; 0; —1) et Q (1; —1; 3) et perpendiculaire au plan $3x + 2y - z + 5 = 0$.

Réponse. $7x - 11y - z - 15 = 0$.

301. Trouver sur le plan $2x - 5y + 2z + 5 = 0$ un point M tel que les angles formés par la droite OM avec les axes de coordonnées soient égaux.

Réponse. M (5; 5; 5).

302. Trouver l'équation du plan en sachant que le point P (4; —3; 12) est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur ce plan.

Réponse. $4x - 3y + 12z - 169 = 0$.

303. Trouver les équations des plans qui passent par les axes de coordonnées et qui sont perpendiculaires au plan $3x - 4y + 5z - 12 = 0$.

Réponse. $5y + 4z = 0$; $5x - 3z = 0$; $4x + 3y = 0$.

304. Trouver l'équation du plan dont les points sont équidistants des points P (1; —4; 2) et Q (7; 1; —5).

Réponse. $6x + 5y - 7z - 27 = 0$.

305. Trouver l'équation du plan passant par les points P (0; 2; 0), Q (2; 0; 0) et formant un angle de 60° avec le plan $x = 0$.

Réponse. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{\pm\sqrt{2}} = 1$.

306. Calculer l'angle de deux plans qui passent par le point $M(1; -1; -1)$, en sachant que l'un d'eux contient l'axe Ox, tandis que l'autre comporte l'axe Oz.

Réponse. 60 °.

307. Trouver l'équation du plan passant par l'origine des coordonnées et par deux points: $P(4; -2; 1)$ et $Q(2; 4; -3)$.

Réponse. $x + 7y + 10z = 0$.

308. Trouver l'équation du plan passant par le point d'intersection des plans $2x + 2y + z - 7 = 0$, $2x - y + 3z + 3 = 0$, $4x + 5y - 2z - 12 = 0$ et par les points $M(0; 3; 0)$ et $N(1; 1; 1)$.

Réponse. $x - z = 0$.

309. Former l'équation du plan passant par la ligne d'intersection des plans $x + 5y + 9z - 13 = 0$, $3x - y - 5z + 1 = 0$ et par le point $M(0; 2; 1)$.

Réponse. $x + y + z - 3 = 0$.

310. Former l'équation du plan passant par la ligne d'intersection des plans $x + 2y + 3z - 5 = 0$ et $3x - 2y - z + 1 = 0$ et qui détermine des segments de même longueur sur les axes Ox et Oz.

Réponse. $5x + 2y + 5z - 9 = 0$.

311. Former l'équation du plan passant par la ligne d'intersection des plans $(1 + \sqrt{2})x + 2y + 2z - 4 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$ et qui forme avec le plan xOy un angle de 60 °.

Réponse. $\sqrt{2}x + y + z - 5 = 0$.

312. Former l'équation du plan passant par la ligne d'intersection des plans $2x - y - 12z - 3 = 0$ et $3x + y - 7z - 2 = 0$ et perpendiculaire au plan $x + 2y + 5z - 1 = 0$.

Réponse. $4x + 3y - 2z - 1 = 0$.

313. Former l'équation du plan passant par la ligne d'intersection des plans $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ et par l'origine des coordonnées.

Réponse.

$$(A_1D_2 - A_2D_1)x + (B_1D_2 - B_2D_1)y + (C_1D_2 - D_1C_2)z = 0.$$

314. Former l'équation du plan passant par le point $M(0; 2; 1)$ et parallèle aux vecteurs

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ et } \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Indication. Le plan cherché est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Réponse. $x - y + 2 = 0$.

315. Quelle est la valeur de l'angle que forme le plan $x + y + 2z - 4 = 0$ avec le vecteur $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$?

Indication. Utiliser le vecteur $\mathbf{N}$ normal au plan.

Réponse. arc sin $\frac{5}{6}$.

Droite. 1. Une droite peut être donnée par les *équations de deux plans*

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

qui se coupent suivant cette droite.

2. En éliminant à tour de rôle x et y entre les équations ci-dessus, on obtient les équations $x = az + c$, $y = bz + d$. Ici, la droite est définie par les *deux plans qui la projettent sur les plans xOz et yOz.*

3. *Equation d'une droite passant par les deux points* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ et $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ est de la forme:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4. Les ainsi appelées *équations canoniques*

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

définissent une droite passant par le point $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ et parallèle à un vecteur $\mathbf{s} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$. Ces équations peuvent, en particulier, s'écrire de la façon suivante:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

où α, β et γ sont les angles formés par la droite avec les axes de coordonnées. Les cosinus directeurs de la droite sont calculés d'après les formules:

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

5. En introduisant le paramètre t, il est aisé de passer des équations canoniques d'une droite à ses *équations paramétriques*:

$$\begin{cases} x=lt+x_1, \\ y=mt+y_1, \\ z=nt+z_1. \end{cases}$$

6. L'*angle de deux droites* données par leurs équations canoniques $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{z_1}$ et $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ est déterminé par la formule

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}};$$

condition pour que les deux droites soient parallèles:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2};$$

condition pour que les deux droites soient perpendiculaires:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

7. Condition nécessaire et suffisante pour que deux droites données par leurs équations canoniques soient *coplanaires* (situées dans le même plan):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Si les grandeurs l_1, m_1, n_1 ne sont pas proportionnelles aux grandeurs l_2, m_2, n_2, la relation mentionnée plus haut constitue la condition nécessaire et suffisante pour que les deux droites soient concourantes dans l'espace.

8. L'*angle formé par une droite* $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ *avec un plan* $Ax+By+Cz+D=0$ est déterminé par la formule

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

condition pour que la droite et le plan soient parallèles:

$$Al+Bm+Cn=0;$$

condition pour que la droite soit perpendiculaire au plan:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

9. Pour déterminer le *point d'intersection d'une droite* $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=$ $=\frac{z-z_0}{n}$ *avec un plan* $Ax+By+Cz+D=0$, il faut résoudre simultanément leurs équations, en utilisant à cette fin les équations paramétriques de la droite: $x=lt+x_0$, $y=mt+y_0$, $z=nt+z_0$:

a) si $Al+Bm+Cn\neq 0$, la droite rencontre le plan en un point;

b) si $Al+Bm+Cn=0$ et si $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, la droite est parallèle au plan;

c) si $Al+Bm+Cn=0$ et si $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, la droite se situe dans le plan.

316. Mettre sous la forme canonique les équations de la droite $2x-y+3z-1=0$, $5x+4y-z-7=0$.

Solution. Première méthode. En éliminant d'abord y, ensuite z, on obtient

$$13x+11z-11=0,\quad 17x+11y-22=0.$$

En résolvant chacune de ces équations par rapport à x, on aura

$$x=\frac{11(y-2)}{-17}=\frac{11(z-1)}{-13}$$

d'où

$$\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Seconde méthode. Trouvons le vecteur $\mathbf{s}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+$ $+n\mathbf{k}$ parallèle à la droite cherchée. Vu qu'il doit être perpendiculaire aux vecteurs normaux aux plans donnés $\mathbf{N}_1=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

et $\mathbf{N}_2 = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, on peut le remplacer par le produit vectoriel des deux derniers vecteurs $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{N}_2$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}_1 \,.\, \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 13\mathbf{k}.$$

Ainsi, on a $l = -11$; $m = 17$; $n = 13$.

Le point $M_1(x_1; y_1; z_1)$ par lequel passe la droite cherchée peut être pris en tant que point de rencontre de cette droite avec n'importe quel plan de coordonnées, par exemple, avec le plan yOz. Comme, dans ce cas, $x_1 = 0$, les coordonnées y_1 et z_1 de ce point seront déterminées à partir du système d'équations des plans donnés en y posant $x = 0$:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0, \\ 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve $y_1 = 2$; $z_1 = 1$.

Donc, la droite cherchée est déterminée par les équations

$$\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

On voit que le résultat obtenu est le même.

317. Construire la droite

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 9 = 0, \\ 4x + 2y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

S o l u t i o n. La droite cherchée peut être construite en tant que ligne d'intersection des plans. Pour ce faire, écrivons les équations des plans qui la définissent en utilisant les segments qu'ils déterminent sur les axes de coordonnées:

$$\frac{x}{4{,}5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1,$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1.$$

On construit les plans donnés et l'on trouve la droite cherchée qui n'est autre chose que la ligne d'intersection de ces plans (fig. 21).

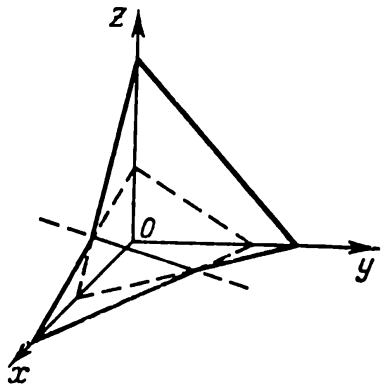


Fig. 21

318. Abaisser de l'origine des coordonnées la perpendiculaire sur la droite

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

S o l u t i o n. Formons l'équation du plan passant par l'origine des coordonnées et perpendiculaire à la droite donnée : $2x + 3y + z = 0$. (Pour ce plan, on peut poser $A = l$; $B = m$; $C = n$; $D = 0$; ici, l'on a utilisé la condition pour qu'une droite et un plan soient perpendiculaires, comme il est indiqué au p. 8.)

Trouvons le point de rencontre de ce plan avec la droite donnée. Les équations paramétriques de la droite s'écrivent

$$x = 2t + 2,$$
$$y = 3t + 1,$$
$$z = t + 3.$$

Pour déterminer t, on a l'équation

$$2(2t + 2) + 3(3t + 1) + t + 3 = 0.$$

Donc, $t = -5/7$. Les coordonnées du point de rencontre seront $x = \frac{4}{7}$, $y = -\frac{8}{7}$, $z = \frac{16}{7}$, c'est-à-dire $M\left(\frac{4}{7}; -\frac{8}{7}; \frac{16}{7}\right)$.

Il ne reste qu'à former les équations de la droite passant par l'origine des coordonnées et par le point M (cf. p. 3) :

$$\frac{x}{4/7} = \frac{y}{-8/7} = \frac{z}{16/7}, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}.$$

319. Déterminer le paramètre n figurant aux équations de la droite $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{n}$ de façon que cette droite et la droite $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$ soient concourantes et trouver leur point d'intersection.

S o l u t i o n. Pour trouver le paramètre n, on utilise la condition pour que deux droites soient concourantes (cf. p. 7) :

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n \end{vmatrix} = 0,$$

$$2n + 10 + 3 - 15n = 0, \text{ c'est-à-dire } n = 1.$$

On obtient ainsi les équations des droites concourantes :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1} \text{ (droite cherchée)},$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1} \text{ (droite donnée)}.$$

Pour trouver le point d'intersection de ces droites, exprimons x et y de la première équation en fonction de z: $x = 2z$, $y = -3z$. En substituant leurs valeurs dans l'égalité $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2}$, on obtient $\frac{2z+1}{3} = \frac{-3z+5}{2}$, d'où $z = 1$. z étant connue, on trouve x et y: $x = 2z = 2$, $y = -3z = -3$.

On a ainsi $M(2; -3; 1)$.

320. Trouver les équations de la droite passant par le point $M(3; 2; -1)$ et qui se coupe à angle droit avec l'axe Ox.

Solution. Etant donné que la droite est perpendiculaire à l'axe Ox et qu'elle coupe ce dernier, elle passera par le point $N(3; 0; 0)$. Formons l'équation de la droite passant par les points M et N:

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

321. On donne le plan $x + y - 2z - 6 = 0$ et le point $M(1; 1; 1)$ situé en dehors de ce plan. Trouver le point N symétrique du point M par rapport au plan donné.

Solution. Ecrivons l'équation de toute droite passant par le point M:

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-1}{n}.$$

La condition pour que cette droite soit perpendiculaire au plan donné implique

$$\frac{l}{1} = \frac{m}{1} = \frac{n}{-2};$$

et l'on peut poser $l = m = 1$; $n = -2$; donc, l'équation de la droite cherchée est

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Trouvons la projection du point M sur le plan donné en résolvant simultanément les équations $x + y - 2z - 6 = 0$ et $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$; pour ce faire, écrivons l'équation de la droite sous la forme $x = t + 1$, $y = t + 1$, $t = -2t + 1$. En substituant ces valeurs de x, y et z dans l'équation du plan, on trouve $t = 1$, d'où $x = 2$, $y = 2$, $z = -1$.

Les coordonnées du point symétrique seront trouvées à l'aide des formules

$$\bar{x} = \frac{x_M + x_N}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_M + y_N}{2}, \quad \bar{z} = \frac{z_M + z_N}{2}.$$

c'est-à-dire

$$2=\frac{1+x_N}{2},\quad 2=\frac{1+y_N}{2},\quad -1=\frac{1+z_N}{2},$$

d'où $x_N = 3$, $y_N = 3$, $z_N = -3$. Donc, N (3; 3; —3).

322. On donne la droite $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ et le point M (1; 1; 1) qui ne se situe pas sur elle. Trouver le point N symétrique du point M par rapport à la droite donnée.

Solution. Formons l'équation du plan qui projette le point M sur la droite donnée:

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

En utilisant la condition pour que la droite donnée et le plan projetant soient perpendiculaires $\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{-1}$, on trouve l'équation du plan

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0,$$

ou

$$2x+3y-z-4=0.$$

Trouvons la projection du point M sur la droite en résolvant simultanément les équations

$$2x+3y-z-4=0$$

et

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}.$$

Les équations paramétriques de la droite donnée seront $x = 2t + 1$, $y = 3t$, $z = -t - 1$. En substituant x, y et z dans l'équation du plan, on trouve $t = \frac{1}{14}$. On en tire $x = 8/7$, $y = 3/14$, $z = -15/14$.

Les coordonnées du point symétrique peuvent maintenant être trouvées à l'aide des formules donnant les coordonnées du point milieu d'un segment:

$$\bar{x}=\frac{x_M+x_N}{2},\quad \bar{y}=\frac{y_M+y_N}{2},\quad \bar{z}=\frac{z_M-z_N}{2},$$

ou

$$\frac{8}{7}=\frac{1+x_N}{2},\quad \frac{3}{14}=\frac{1+y_N}{2},\quad -\frac{15}{14}=\frac{1+z_N}{2},$$

d'où $x_N = \frac{9}{7}$, $y_N = -\frac{4}{7}$, $z_N = -\frac{22}{7}$. Donc, $N\left(\frac{9}{7};\ -\frac{4}{7};\ -\frac{22}{7}\right)$.

323. Mener par la droite $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ le plan parallèle à la droite $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

S o l u t i o n. Ecrivons les équations de la première des droites données à l'aide des équations des deux plans qui la projettent respectivement sur les plans xOy et yOz:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}, \quad \text{ou} \quad x+2y-1=0,$$

$$\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}, \quad \text{ou} \quad 3y+z-5=0.$$

L'équation du faisceau de plans passant par cette droite s'écrira

$$x+2y-1+\lambda(3y+z-5)=0,$$

ou

$$x+(2+3\lambda)y+\lambda z-(1+5\lambda)=0.$$

En utilisant la condition pour qu'une droite et un plan soient paral lèles $Al+Bm+Cn=0$, on détermine λ de façon que le plan correspondant du faisceau soit parallèle à la seconde des deux droites données.

On trouve: $-1\cdot 1+2\cdot(2+3\lambda)-3\cdot\lambda=0$, ou $3\lambda+3=0$, d'où $\lambda=-1$. Ainsi, le plan cherché est défini par l'équation

$$x-y-z+4=0.$$

324. Trouver l'équation de la projection de la droite $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ sur le plan $x+y+2z-5=0$.

S o l u t i o n. Ecrivons l'équation de la droite donnée sous forme d'équations des deux plans qui la projettent respectivement sur les plans xOy et xOz:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}, \quad \text{ou} \quad 2x-y-3=0,$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{z}{3}, \quad \text{ou} \quad 3x-z-3=0.$$

L'équation du faisceau de plans passant par la droite donnée va s'écrire

$$2x-y-3+\lambda(3x-z-3=0,$$

ou

$$(2+3\lambda)x-y-\lambda z-3(1+\lambda)=0.$$

Choisissons parmi les plans de ce faisceau celui qui projette la droite donnée sur le plan donné, en utilisant la condition pour que deux plans soient perpendiculaires: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

On trouve $1(2+3\lambda)+1(-1)+2(-\lambda)=0$, ou $\lambda+1=0$, d'où $\lambda=-1$.

Ainsi, le plan projetant sera $2x - y - 3 + (-1)(3x - z - 3) = 0$, ou $x + y - z = 0$.

La projection cherchée peut être déterminée en tant que ligne d'intersection du plan donné et du plan projetant:

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0, \\ x+y-z=0. \end{cases}$$

En mettant ces équations de la droite sous la forme canonique, on obtient finalement

$$\frac{x}{1}=\frac{y-\frac{5}{3}}{-1}=\frac{z-\frac{5}{3}}{0}.$$

325. Former les équations de la droite passant par le point M (5; 3; 4) et parallèle au vecteur $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

Solution. Utilisons les équations canoniques de la droite. Ici, on a $l = 2$, $m = 5$, $n = -8$. On obtient

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{-8}.$$

326. Former l'équation de la droite passant par le point M (1; 1; 1) et perpendiculaire aux vecteurs $\mathbf{s}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ et $\mathbf{s}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solution. La droite cherchée est parallèle au vecteur $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, donc elle est déterminée par les équations

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-7}.$$

327. Trouver les équations des projections de la droite

$$\begin{cases} x+2y+3z-26=0, \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$$

sur les plans de coordonnées.

Réponse. $5y+5z-64=0,\ x=0\ (yOz);$

$5x+5z-2=0,\ y=0\ (xOz);$

$5x-5y+62=0,\ z=0\ (xOy).$

328. Mettre sous la forme canonique les équations de la droite

$$\begin{cases} 2x+3y-16z-7=0, \\ 3x+y-17z=0. \end{cases}$$

Réponse. $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}.$

329. Calculer les angles formés par la droite

$$\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x-3z+8=0 \end{cases}$$

avec les axes de coordonnées.

Réponse. $\cos\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.

330. Trouver les équations de la droite passant par le point M (1; —2; 3) et qui forme avec les axes Ox et Oy respectivement les angles de 45° et 60°.

Réponse. $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{\pm 1}$.

331. Trouver les équations de la droite passant par le point N (5; —1; —3) et parallèle à la droite

$$\begin{cases} 2x+3y+z-6=0, \\ 4x-5y-z+2=0. \end{cases}$$

Réponse. $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}$.

332. Trouver le point d'intersection des droites

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{2} \quad \text{et} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{3}.$$

Réponse. M (0; 7; —2).

333. On donne trois sommets successifs d'un parallélogramme: A (3; 0; —1), B (1; 2; —4), C (0; 7; —2). Trouver les équations des côtés AD et CD.

Réponse. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$; $\frac{x}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+2}{3}$.

334. Trouver les équations paramétriques de la droite passant par les points M (2; —5; 1) et N (—1; 1; 2).

Réponse. $\begin{cases} x = -3t-1, \\ y = 6t+1, \\ z = t+2. \end{cases}$

335. Calculer la distance des droites parallèles

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{et} \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

Réponse. $\frac{5}{6}\sqrt{30}$.

336. On donne les points A (—1; 2; 3) et B (2; —3; 1). Former les équations de la droite passant par le point M (3; —1; 2) et parallèle au vecteur $\overline{AB}$.

Réponse. $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-2}$.

337. Trouver l'angle des droites

$$\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$$

Réponse. $\cos\varphi=\frac{20}{21}$.

338. Trouver dans le plan yOz la droite passant par l'origine des coordonnées et perpendiculaire à la droite

$$\begin{cases} 2x-y=2, \\ y+2z=-2. \end{cases}$$

Réponse. $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

339. On donne deux sommets du parallélogramme $ABCD$: C $(-2;\ 3;\ -5)$ et D $(0;\ 4;\ -7)$ et le point d'intersection de ses diagonales M $(1;\ 2;\ -3{,}5)$. Trouver l'équation du côté AB.

Réponse. $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

340. Soit ABC un triangle dont les sommets se situent aux points de rencontre du plan $x+2y+4z-8=0$ avec les axes de coordonnées. Trouver les équations de la ligne médiane du triangle parallèle au plan xOy.

Réponse. $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{0}$.

341. On donne les points A $(1;\ 1;\ 1)$, B $(2;\ 3;\ 3)$ et C $(3;\ 3;\ 2)$. Former les équations de la droite passant par le point A et perpendiculaire aux vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

Réponse. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{2}$.

342. Former les équations de la droite passant par le point M $(0;\ 2;\ 1)$ et qui forme des angles égaux avec les vecteurs $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{k}$.

Réponse. $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

343. Trouver l'équation du plan passant par la droite $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ et perpendiculaire au plan $3x+y-z+2=0$.

Réponse. $x-5y-2z+11=0$.

344. Trouver les équations de la projection de la droite $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-2}$ sur le plan $2x+3y-z-5=0$.

Réponse. $\frac{x}{-10}=\frac{y-3{,}4}{13}=\frac{z-5{,}2}{19}$.

§ 2. Surfaces du second degré (quadriques)

1. Sphère. Dans le système de coordonnées cartésiennes, une sphère de centre $C(a;\ b;\ c)$ et de rayon r est définie par l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Si le centre de la sphère se situe à l'origine des coordonnées, son équation prend la forme

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

345. Trouver les coordonnées du centre et le rayon de la sphère donnée par l'équation $x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0$.

Solution. Mettons l'équation de la sphère sous sa forme canonique $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$. Pour ce faire, complétons les termes contenant x, y et z de façon à obtenir des carrés parfaits et écrivons l'équation donnée comme suit:

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+(y^2+2y+1)-1+z^2+1=0,$$

ou

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Il s'ensuit que le centre de la sphère se situe au point $C\left(\frac{1}{2};\ -1;0\right)$, son rayon étant $r=\frac{1}{2}$.

346. Former l'équation de la sphère passant par les points $A(1;\ 2;\ -4)$, $B(1;\ -3;\ 1)$, $C(2;\ 2;\ 3)$ si l'on sait que son centre se situe dans le plan xOy.

Solution. Etant donné que les points A, B et C se trouvent sur la sphère $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ dont le centre se situe dans le plan xOy (donc, $c=0$), leurs coordonnées doivent transformer l'équation cherchée en une identité, et l'on arrive aux équations:

$$(1-a)^2+(2-b)^2+(-4)^2=r^2,$$
$$(1-a)^2+(-3-b)^2+1^2=r^2,$$
$$(2-a)^2+(2-b)^2+3^2=r^2.$$

D'où l'on a

$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1-a)^2+(-3-b)^2+1,$$
$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(2-a)^2+(2-b)^2+9,$$

ou

$$(2-b)^2-(-3-b)^2=-15,\quad \text{c'est-à-dire}\quad 10b=10;$$
$$(1-a)^2-(2-a)^2=-7,\quad \text{c'est-à-dire}\quad 2a=-4.$$

Donc, $a=-2$, $b=1$. Le centre de la sphère se situe au point $C(-2;\ 1;\ 0)$. On trouve le rayon de la sphère:

$$r^2=(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1+2)^2+(2-1)^2+16=26.$$

De cette façon, l'équation cherchée est de la forme

$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26.$$

347. Trouver les coordonnées du centre et le rayon du cercle

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100,\\ 2x-2y-z+9=0.\end{cases}$$

Solution. Du centre $C(3;\ -2;\ 1)$ de la sphère abaissons la perpendiculaire sur le plan $2x-2y-z+9=0$. Les équations de cette perpendiculaire peuvent s'écrire

$$\frac{x-3}{l}=\frac{y+2}{m}=\frac{z-1}{n},$$

où $\frac{l}{2}=\frac{m}{-2}=\frac{n}{-1}$ (condition pour qu'une droite et un plan soient parallèles).

Ainsi, les équations de la perpendiculaire sont de la forme

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1}.$$

Trouvons maintenant les coordonnées du point de rencontre de la droite $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ avec le plan $2x-2y-z+9=0$. Ce point sera le centre du cercle suivant lequel le plan donné coupe la sphère.

Prenons les équations paramétriques de la droite $x=2t+3$, $y=-2t-2$, $z=-t+1$ et trouvons t en substituant x, y, z dans l'équation du plan : $2(2t+3)-2(-2t-2)-(-t+1)+9=0$, d'où $t=-2$.

Par suite, les coordonnées du centre du cercle seront $x=2(-2)+3=-1$, $y=-2(-2)-2=2$, $z=-(-2)+1=3$. Ainsi, le centre du cercle se trouve au point $C_1(-1;\ 2;\ 3)$.

Trouvons maintenant la distance du centre de la sphère $C(3;-2;1)$ au plan $2x-2y-z+9=0$:

$$d=\frac{2\cdot 3+2\cdot 2-1+9}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=6.$$

Le rayon du cercle est déterminé à partir de l'égalité $r^2=R^2-d^2$, où R est le rayon de la sphère. Ainsi, l'on a $r^2=100-36=64$, $r=8$

348. Déterminer les cordonnées du centre et les rayons des sphères données par les équations suivantes :

a) $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=25$;
b) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-2=0$;
c) $2x^2+2y^2+2z^2+4y-3z+2=0$;
d) $x^2+y^2+z^2=2x$;
e) $x^2+y^2+z^2=4z-3$.

Réponse. a) $C(-1;\ -2;\ 0)$, $r = 5$; b) $C(2;\ -3;\ -1)$, $r = 4$; c) $C\left(0;\ -1;\ \frac{3}{4}\right)$, $r = \frac{3}{4}$; d) $C(1;\ 0;\ 0)$, $r = 1$; e) $C(0;\ 0;\ 2)$, $r = 1$.

349. Quelle est la disposition du point $M(1;\ -1;\ 3)$ par rapport aux sphères

a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 19$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y - 2z = 0$?

Réponse. a) A l'intérieur de la sphère; b) en dehors de la sphère; c) sur la sphère.

350. Former l'équation de la sphère dont l'un des diamètres a pour extrémités les points $M(4;\ -1;\ -3)$ et $N(0;\ 3;\ -1)$.

Réponse. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

351. Former les équations du cercle suivant lequel le plan de coordonnées $z = 0$ coupe la sphère $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$.

Réponse. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$, $z = 0$.

352. Trouver les coordonnées du centre et le rayon du cercle $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, $2x + 2y - z = 18$.

Réponse. $C(4;\ 4;\ -2)$; $r = 8$.

2. Surfaces cylindriques et cône du second degré. Une équation de la forme $F(x, y) = 0$ définit dans l'espace une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz. Par analogie, une équation de la forme $F(x, z) = 0$ définit une surface cylindrique ayant les génératrices parallèles à l'axe Oy, et, enfin, une équation de la forme $F(y, z) = 0$ définit une surface cylindrique de génératrices parallèles à l'axe Ox.

Les équations canoniques des cylindres du second degré sont les suivantes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\textit{cylindre elliptique});$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\textit{cylindre hyperbolique});$$

$$y^2 = 2px \quad (\textit{cylindre parabolique}).$$

Les génératrices de tous ces cylindres sont parallèles à l'axe Oz, alors que la directrice est représentée par la courbe du second degré correspondante (ellipse, hyperbole, parabole) contenue dans le plan xOy.

Il ne faut pas oublier qu'une courbe dans l'espace peut être donnée soit sous sa forme paramétrique, soit à l'aide des équations de deux surfaces dont l'intersection représente la courbe considérée.

Par exemple, les équations de la directrice du cylindre elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

c'est-à-dire les équations de l'ellipse contenue dans le plan xOy, sont

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

L'équation d'un *cône du second degré*, dont le sommet se situe à l'origine des coordonnées et qui a comme axe l'axe Oz, est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Par analogie, les équations $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ définissent des cônes du second degré dont le sommet se confond avec l'origine des coordonnées, alors que les axes Oy et Ox sont respectivement leurs propres axes.

353. Quelle est la surface définie dans l'espace par les équations : a) $x^2 = 4y$; b) $z^2 = xz$?

S o l u t i o n. a) L'équation $x^2 = 4y$ définit un cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz, sa directrice étant la parabole $x^2 = 4y$, $z = 0$.

b) L'équation $z^2 = xz$ peut être mise sous la forme $z(z - x) = 0$ et décomposée comme suit : $z = 0$ et $z = x$, ce qui signifie qu'elle définit deux plans : le plan xOy et le plan bissecteur $z = x$ passant par l'axe Oy.

354. Quelle est la ligne suivant laquelle le plan $y = 2$ coupe le cône $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$?

S o l u t i o n. En éliminant y entre les équations du système, on obtient

$$x^2+4-2z^2=0,$$

ou

$$\frac{z^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1.$$

Il s'ensuit que la ligne d'intersection représente une hyperbole située dans le plan $y = 2$ et dont les axes réel (focal) et imaginaire (non focal) sont respectivement parallèles aux axes Oz et Ox.

355. Former l'équation de la surface conique dont le sommet se situe au point M (0 ; 0 ; 1) et ayant comme directrice l'ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $z = 3$.

S o l u t i o n. Formons l'équation de la génératrice AM, où M (0 ; 0 ; 1), A (x_0 ; y_0 ; z_0) étant un point de l'ellipse. Les équations de cette génératrice sont de la forme

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}.$$

Etant donné que le point A se situe sur l'ellipse, ses coordonnées doivent vérifier les équations de cette dernière :

$$\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1,\ z_0=3.$$

En éliminant maintenant x_0, y_0 et z_0 entre les équations du système

$$\frac{x}{x_0}=\frac{z-1}{z_0-1},\quad \frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1},\quad \frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1,\quad z_0=3,$$

on obtient l'équation du cône cherché:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=0.$$

356. Déterminer les surfaces définies par les équations ci-dessous et construire ces surfaces:

a) $x^2+y^2=4$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; c) $x^2-y^2=1$; d) $y^2=2x$; e) $z^2=y$; f) $z+x^2=0$; g) $x^2+y^2=2y$; h) $x^2+y^2=0$; i) $x^2-z^2=0$; j) $y^2=xy$.

Réponse. a) Cylindre à base circulaire; b) cylindre elliptique; c) cylindre hyperbolique; d) cylindre parabolique; e) cylindre parabolique; f) cylindre parabolique; g) cylindre à base circulaire; h) l'axe des cotes $x=0$, $y=0$; i) deux plans bissecteurs $x=z$ et $x=-z$; j) deux plans $y=0$ et $y=x$.

357. Former les équations des lignes suivant lesquelles le cône $x^2-y^2+z^2=0$ est coupé par les plans: a) $y=3$; b) $z=1$; c) $x=0$.

Réponse. a) $\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ y=3 \end{cases}$ (cercle); b) $\begin{cases} y^2-x^2=1, \\ z=1 \end{cases}$ (hyperbole); c) $\begin{cases} z^2-y^2=0, \\ x=0 \end{cases}$ (deux droites).

358. Former les équations des cônes dont le sommet se confond avec l'origine des coordonnées, alors que les génératrices sont données par les équations:

a) $x=a$, $y^2+z^2=b^2$; b) $y=b$, $x^2+z^2=a^2$; c) $z=c$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Réponse. a) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$; b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$; c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

3. Surfaces de révolution. Surfaces du second degré (quadriques). Si une courbe d'équation $F(y, z)=0$, $x=0$ située dans le plan yOz tourne autour de l'axe Oz, l'équation de la surface ainsi engendrée est de la forme

$$F(\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0.$$

D'une façon analogue, l'équation $F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0$ va définir une surface engendrée par la rotation d'une courbe d'équation $F(x, y)=0$, $z=0$ autour de l'axe Ox, et l'équation $F(\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$, une surface engendrée par la rotation de la même courbe autour de l'axe Oy.

Ci-après sont données les équations des surfaces de révolution du second degré engendrées par la rotation d'une ellipse, d'une hyperbole et d'une parabole autour de leurs axes de symétrie.

Ellipsoïde de révolution

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

l'axe de révolution coïncide avec l'axe Oz; l'ellipsoïde est aplati pour $a > c$; il est allongé pour $a < c$ (lorsque $a = c$, l'ellipsoïde se transforme en une sphère).

Hyperboloïde de révolution à une nappe

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

l'axe de révolution coïncide avec l'axe Oz (c'est l'axe imaginaire de l'hyperbole dont la rotation engendre cette surface).

Hyperboloïde de révolution à deux nappes

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

l'axe de révolution coïncide avec l'axe Oz (c'est l'axe réel de l'hyperbole dont la rotation engendre cette surface).

Paraboloïde de révolution

$$x^2+y^2=2pz;$$

l'axe de révolution coïncide avec l'axe Oz.

Les surfaces de révolution du second degré représentent un cas particulier des surfaces du second degré générales dont les équations canoniques sont données ci-après.

Ellipsoïde (rapporté à ses axes):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hyperboloïde à une nappe:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hyperboloïde à deux nappes:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

Outre ces quatre surfaces du second degré, les trois cylindres du second degré (elliptique, hyperbolique et parabolique) et le cône du second degré, il y a encore une surface du second degré appelée *paraboloïde hyperbolique* dont l'équation canonique est de la forme

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

On voit ainsi qu'il y a en tout neuf surfaces différentes du second degré.

359. Trouver l'équation de la surface engendrée par la rotation de la droite $x + 2y = 4$, $z = 0$ autour de l'axe Ox.

Solution. La surface de révolution engendrée représente un cône de sommet M (4; 0; 0). Soit A (X; Y; Z) un point arbitraire de la surface cherchée. Le point de la droite donnée correspondant au point A sera le point B (x; y; 0). Les points A et B sont contenus par le même plan perpendiculaire à l'axe de révolution Ox. Alors, $X = x$, $Y^2 + Z^2 = y^2$.

En portant les valeurs de x et de y dans l'équation de la droite donnée, on obtient l'équation de la surface de révolution cherchée:

$$X + 2\sqrt{Y^2 + Z^2} = 4,$$

ou

$$4(Y^2 + Z^2) - (X - 4)^2 = 0,$$

ou

$$4Y^2 + 4Z^2 - (X - 4)^2 = 0.$$

360. Quelle est la surface définie par l'équation $x^2 = yz$?

Solution. Effectuons une rotation des axes de coordonnées Oy et Oz (le sens de rotation est depuis l'axe Oy vers l'axe Oz) autour de l'axe Ox d'un angle de 45°. Les formules de transformation des coordonnées sont les suivantes: $x = x'$, $y = y' \cos\alpha - z' \sin\alpha$, $z = y' \sin\alpha + z' \cos\alpha$. Vu que $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $x = x'$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - z')$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z')$. Portons ces valeurs dans l'équation de la surface. On obtient $x'^2 = \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{2}$, ou

$$x'^2 - \frac{y'^2}{2} + \frac{z'^2}{2} = 0$$

(c'est un cône dont le sommet se situe à l'origine des coordonnées et dont l'axe se confond avec l'axe des ordonnées).

361. Trouver l'équation de la surface engendrée par la rotation de la droite $2y + z - 2 = 0$, $x = 0$ autour de l'axe Oz.

Réponse. $4x^2 + 4y^2 - (z - 2)^2 = 0$.

362. Trouver les équations des lignes d'intersection de la surface $z = x^2 - y^2$ et des plans $z = 1$, $y = 1$, $x = 1$, $z = -1$.

Réponse. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ z = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} z + 1 = x^2, \\ y = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 = 1 - z, \\ x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - x^2 = 1, \\ z = -1. \end{cases}$

363. Quelles sont les surfaces définies par les équations: a) $z = xy$; b) $z^2 = xy$?

Indication. Tourner les axes de coordonnées Ox et Oy autour de l'axe Oz d'un angle de 45°.

Réponse. a) Un paraboloïde hyperbolique; b) un cône ayant pour sommet l'origine des coordonnées.

364. Trouver l'équation du paraboloïde elliptique dont le sommet se situe à l'origine des coordonnées et dont l'axe coïncide avec l'axe Oz si l'on donne deux points M $(-1;\ -2;\ 2)$ et N $(1;\ 1;\ 1)$ situés sur sa surface.

Réponse. $3z = 2x^2 + y^2$.

365. Former l'équation de l'ellipsoïde qui admet comme axes de symétrie les axes de coordonnées si l'on donne trois points A $(3;\ 0;\ 0)$, B $(-2;\ 5/3;\ 0)$ et C $(0;\ -1;\ 2/\sqrt{5})$ situés sur sa surface.

Réponse. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{1} = 1$.

366. Trouver l'équation de la ligne d'intersection des surfaces $z = 2 - x^2 - y^2$ et $z = x^2 + y^2$.

Réponse. $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ (c'est un cercle).

367. Etudier les surfaces définies par l'équation $z^2 + x^2 = m(z^2 + y^2)$ pour: a) $m = 0$; b) $0 < m < 1$; c) $m > 1$; d) $m < 0$; e) $m = 1$.

Réponse. a) L'axe des ordonnées; b) un cône d'axe Oy, ayant le sommet à l'origine des coordonnées; c) un cône d'axe Ox, ayant le sommet à l'origine des coordonnées; d) l'origine des coordonnées; e) un couple de plans se coupant suivant l'axe Oz.

4. Equation générale d'une surface du second degré (d'une quadrique). L'équation du second degré par rapport à x, y et z est de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

Cette équation peut définir une sphère, un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, un paraboloïde elliptique ou hyperbolique, une surface cylindrique ou conique du second degré. Cette équation peut aussi définir un ensemble de deux plans, un point, une droite, ou bien elle peut être privée d'interprétation géométrique (elle peut définir une surface imaginaire).

Si $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, cette équation prend la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

Dans ce cas, l'équation peut être facilement simplifiée en effectuant une translation des axes de coordonnées, ce qui permet l'établissement immédiat de son interprétation géométrique.

368. Quelle est l'interprétation géométrique de l'équation

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0?$$

Solution. L'équation donnée peut s'écrire

$$(x + 2y + 3z)^2 - 4(x + 2y + 3z) + 3 = 0.$$

Décomposons en facteurs son premier membre:

$$(x + 2y + 3z - 1)(x + 2y + 3z - 3) = 0.$$

On voit que l'équation définit un ensemble de deux plans

$$x + 2y + 3z - 1 = 0, \; x + 2y + 3z - 3 = 0.$$

369. Quelle est l'interprétation géométrique de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - yx = 0?$$

Solution. En multipliant par 2, on va écrire l'équation comme suit:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0,$$

ou

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 0.$$

Cette équation n'est vérifiée que par les coordonnées de trois points pour lesquels les égalités $x = y$, $y = z$, $x = z$ sont respectées. De cette façon, l'équation donnée définit la droite $x = y = z$.

370. Quelle est l'interprétation géométrique de l'équation

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 8z + 5 = 0?$$

Solution. Ecrivons l'équation sous la forme

$$(x - y)^2 + 4(z - 1)^2 = -1.$$

Cette équation n'a pas d'interprétation géométrique, car son premier membre ne peut pas être négatif quelles que soient les valeurs réelles de x, y et z.

371. Mettre sous sa forme canonique l'équation de la surface

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$$

Solution. Groupons les termes ayant les mêmes coordonnées:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) = -13.$$

Complétons les expressions entre parenthèses de façon à obtenir des carrés parfaits:

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 2y + 1) + 36(z^2 - 2z + 1) = \\ = -13 + 4 + 9 + 36$$

ou

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2 + 36(z - 1)^2 = 36.$$

Effectuons une translation des axes de coordonnées en prenant O' (1; 1; 1) comme nouvelle origine. Les formules de transformation des coordonnées sont:

$$x = x' + 1, \; y = y' + 1, \; z = z' + 1.$$

On obtient l'équation de la surface

$$4x'^2 + 9y'^2 + 36z'^2 = 36,$$

ou

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}+z'^1=1.$$

L'équation définit un ellipsoïde dont le centre se situe à la nouvelle origine des coordonnées, tandis que ses demi-axes sont respectivement égaux à 3, 2 et 1.

372. Mettre sous sa forme canonique l'équation de la surface

$$x^2-y^2-4x+8y-2z=0.$$

Solution. Groupons les termes contenant x et y:

$$(x^2-4x)-(y^2-8y)=2z.$$

Complétons les expressions entre parenthèses de façon à obtenir des carrés parfaits:

$$(x^2-4x+4)-(y^2-8y+16)=2z+4-16,$$

ou

$$(x-2)^2-(y-4)^2=2(z-6).$$

Effectuons une translation des axes de coordonnées en prenant comme nouvelle origine le point O' (2; 4; 6). Alors,

$$x=x'+2,\ y=y'+4,\ z=z'+6.$$

On obtient l'équation $x'^2-y'^2=2z'$ qui définit un paraboloïde hyperbolique.

373. Quelle est la surface définie par l'équation

$$4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0?$$

Solution. Groupons les termes contenant x, y et z:

$$4(x^2-2x)-(y^2-4y)+4(z^2+2z)=-4.$$

Complétons les expressions contenues entre parenthèses pour y obtenir des carrés parfaits:

$$4(x^2-2x+1)-(y^2-4y+4)+4(z^2+2z+1)=$$
$$=-4+4-4+4,$$

ou

$$4(x-1)^2-(y-2)^2+4(z+1)^2=0.$$

Effectuons une translation des axes de coordonnées en prenant en qualité de nouvelle origine le point O' (1; 2; —1). Les formules de transformation des coordonnées sont: $x=x'+1$, $y=y'+2$, $z=z'-1$. L'équation prend la forme

$$4x'^2-y'^2+4z'^2=0,$$

ou

$$x'^2-\frac{y'^2}{4}+z'^2=0.$$

C'est l'équation d'une surface conique.

Trouver les surfaces définies par les équations ci-après.

374. $x^2 - xy - xz + yz = 0$.

Réponse. Deux plans $x = y$ et $x = z$.

375. $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$.

Réponse. Le cylindre à base circulaire $(x - 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

376. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 0$.

Réponse. La droite $x = y = z$.

377. $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$.

Réponse. Le cône du second degré $x^2 + (y - 1)^2 - (z - 1)^2 = 0$ de sommet S (0; 1; 1) dont l'axe est parallèle à l'axe Oz.

378. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z + 4 = 0$.

Réponse. Le point (0; 1; —1).

379. $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$.

Réponse. L'hyperboloïde à une nappe dont l'équation canonique est $x'^2 + \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{4} = 1$.

380. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 2y + 2z + 2 = 0$.

Réponse. L'hyperboloïde à deux nappes dont l'équation canonique est $x'^2 + y'^2 - z'^2 = -1$.

381. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$.

Réponse. Le paraboloïde de révolution d'équation canonique $x'^2 + y'^2 = 4z'$.

382. $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$.

Réponse. Le paraboloïde hyperbolique d'équation canonique $x'^2 - \frac{z'^2}{9} = 2y'$.

CHAPITRE IV

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

§ 1. Notion de déterminant d'ordre n

Le déterminant d'ordre 4 correspondant au tableau d'éléments

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

est déterminé par l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

D'une façon analogue, à l'aide d'un déterminant d'ordre 4 on peut déterminer un déterminant d'ordre 5 et ainsi de suite.

Les définitions du mineur et du cofacteur d'un certain élément de même que les deux théorèmes concernant les cofacteurs et formulés pour les déterminants d'ordre 3 restent valables pour un déterminant de n'importe quel ordre.

Ainsi, en désignant par M_{jk} le mineur et par A_{jk} le cofacteur de l'élément a_{jk} d'un déterminant d'ordre n (c'est un élément qui appartient en même temps à la j-ième ligne et à la k-ième colonne du déterminant examiné), on a

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}.$$

Soit D un déterminant d'ordre n. En le développant par rapport aux éléments de la j-ième ligne d'abord, et par rapport aux éléments de la k-ième colonne ensuite (en vertu du premier théorème sur le cofacteur), on obtient

$$D = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn};$$
$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

D'autre part, lorsque $j \neq i$ et $k \neq l$ (en vertu du second théorème sur les cofacteurs), on a

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \ldots + a_{jn}A_{in} = 0,$$
$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \ldots + a_{nk}A_{nl} = 0.$$

Les propriétés dont jouissent les déterminants d'ordres 2 et 3 et qui ont été formulées à la page 63 restent en vigueur pour les déterminants de n'importe quel ordre.

La solution d'un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

dont le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

est donnée par les formules

$$x_1=\frac{D_1}{D}; \quad x_2=\frac{D_2}{D}; \ldots; x_n=\frac{D_n}{D}.$$

Dans ces formules, D représente le déterminant du système, alors que D_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) désigne le déterminant obtenu en substituant la colonne des termes constants à la k-ième colonne (c'est-à-dire à la colonne des coefficients de l'inconnue à déterminer) dans le déterminant du système:

$$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

383. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

S o l u t i o n. 1) Soustrayons les éléments triplés de la deuxième ligne des éléments de la première ligne.

2) Ajoutons les éléments doublés de la deuxième ligne aux éléments de la troisième ligne.

3) Soustrayons les éléments de la deuxième ligne des éléments de la quatrième ligne.

Ainsi, le déterminant initial devient

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne :

$$D = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons aux éléments de la première ligne les éléments de la troisième ligne et soustrayons les éléments de la troisième ligne des éléments de la deuxième ligne. Par suite, on obtient

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire $D = 70$.

384. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

S o l u t i o n. Mettons en facteur les facteurs communs de la deuxième, de la quatrième et de la cinquième colonnes :

$$D = 2\cdot 2\cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soustrayons les éléments de la première colonne des éléments de la deuxième colonne :

$$D = 20\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Développons le déterminant par rapport aux éléments de la première ligne

$$D=20\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons aux éléments de la deuxième ligne des éléments de la première ligne et mettons —2 (facteur commun des éléments de la première colonne) en facteur:

$$D=-40\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Développons le déterminant par rapport aux éléments de la première colonne:

$$D=-40\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soustrayons les éléments de la troisième ligne des éléments de la deuxième ligne et mettons 2 (facteur commun des éléments de la première ligne) en facteur:

$$D=-80\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Développons le déterminant par rapport aux éléments de la troisième colonne:

$$D=-80\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=640.$$

385. Trouver y en partant du système d'équations

$$\begin{cases} x+2y+3z=14, \\ y+2z+3t=20, \\ z+2t+3x=14, \\ t+2x+3y=12. \end{cases}$$

Solution. Ecrivons le système donné comme suit:

$$\begin{cases} x+2y+3z+0\cdot t=14, \\ 0\cdot x+y+2z+3t=20, \\ 3x+0\cdot y+z+2t=14, \\ 2x+3y+0\cdot z+t=12. \end{cases}$$

On trouve

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\3&0&1&2\\2&3&0&1\end{vmatrix}.$$

Soustrayons les éléments doublés de la première colonne des éléments de la deuxième colonne, et les éléments triplés de la première colonne des éléments de la troisième colonne:

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&3\\3&-6&-8&2\\2&-1&-6&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\-6&-8&2\\-1&-6&1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&-1\\1&6&-1\end{vmatrix}.$$

Soustrayons les éléments doublés de la première colonne des éléments de la deuxième colonne, et les éléments triplés de la première colonne des éléments de la troisième colonne:

$$D=2\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-2&-10\\1&4&-4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2&-10\\4&-4\end{vmatrix}=2(8+40)=96.$$

Trouvons D_y:

$$D_y=\begin{vmatrix}1&14&3&0\\0&20&2&3\\3&14&1&2\\2&12&0&1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&7&3&0\\0&10&2&3\\3&7&1&2\\2&6&0&1\end{vmatrix}.$$

Soustrayons les éléments triplés de la première ligne des éléments de la troisième ligne, et les éléments doublés de la première ligne des éléments de la quatrième ligne:

$$D_y=2\begin{vmatrix}1&7&3&0\\0&10&2&3\\0&-14&-8&2\\0&-8&-6&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}10&2&3\\-14&-8&2\\-8&-6&1\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot2\cdot2\begin{vmatrix}5&1&3\\-7&-4&2\\-4&-3&1\end{vmatrix}.$$

Soustrayons les éléments triplés de la troisième ligne des éléments de la première ligne, et les éléments doublés de la troisième ligne des

éléments de la deuxième ligne :

$$D_y = 8\begin{vmatrix} 17 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 17 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 192.$$

D'où l'on tire

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{192}{96} = 2.$$

386. Calculer le déterminant

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Solution. Soustrayons la première ligne multipliée par a de la deuxième ligne, la deuxième ligne multipliée par a de la troisième ligne, et la troisième ligne multipliée par a de la quatrième ligne :

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}.$$

Soustrayons la première ligne multipliée par b de la deuxième ligne et la deuxième ligne multipliée par b de la troisième ligne :

$$V = (b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-bc & d^2-db \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Donc,

$$V = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Il est aisé de voir que le déterminant examiné sera nul si, et seulement si, parmi les nombres a, b, c, d il y en a qui sont égaux.

387. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Réponse. 900.

388. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}.$$

Réponse. 12.

389. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 \end{vmatrix}.$$

Réponse. 21 280.

390. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}.$$

Réponse. a^2b^2.

391. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} y-3z+4t=-5, \\ x-2z+3t=-4, \\ 3x+2y-5t=12, \\ 4x+3y-5z=5. \end{cases}$$

Réponse. $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$, $t = -1$.

392. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x-3y+5z-7t=12, \\ 3x-5y+7z-t=0, \\ 5x-7y+z-3t=4, \\ 7x-y+3z-5t=16. \end{cases}$$

Réponse. $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, $t = -2$.

393. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 3y+4z=18, \\ 5z+6u=39, \\ 7u+8v=68, \\ 9v+10x=55, \end{cases}$$

Réponse. $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$, $v=5$.

§ 2. Transformations linéaires et matrices

Les égalités

$$x = a_{11}x' + a_{12}y',$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y'$$

expriment d'une façon linéaire les valeurs des variables x et y en fonction des valeurs des variables x' et y'. Ces égalités sont appelées *transformation linéaire des variables* x' et y'. Elles peuvent être considérées en tant que transformation linéaire des coordonnées d'un point (ou d'un vecteur) dans le plan.

Le tableau

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sera appelé *matrice* de la transformation linéaire examinée.

Le déterminant

$$D_A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

est appelé *déterminant de la transformation linéaire*. Dans ce qui suit, on posera $D_A \neq 0$.

On peut aussi considérer une transformation linéaire de trois variables (c'est-à-dire se placer dans un espace à trois dimensions) *

$$x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z',$$
$$y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z',$$
$$z=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'$$

de matrice

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

---

* On appelle souvent transformation linéaire les égalités d'une forme plus générale

$$x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+b_1,$$
$$y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+b_2,$$
$$z=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+b_3.$$

Dans ce qui suit, nous allons examiner une transformation linéaire pour laquelle $b_1=b_2=b_3=0$. Dans les cours d'analyse fonctionnelle, cette transformation linéaire est appelée *opérateur linéaire*.

t de déterminant

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

La matrice A est régulière si $D_A \neq 0$. Dans le cas contraire, elle est singulière.

La matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice carrée d'ordre 2*, alors que la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

est une *matrice carrée d'ordre 3*.

Pour plus de généralité, certaines définitions seront données pour les matrices d'ordre 3, leur application aux matrices d'ordre 2 pouvant être faite sans aucune difficulté.

Si les éléments d'une matrice carrée satisfont à la condition $a_{mn} = a_{nm}$, la matrice est dite *symétrique*.

Deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

sont *égales* ($A = B$) si, et seulement si, leurs éléments respectifs sont égaux, c'est-à-dire lorsque $a_{mn} = b_{mn}$ ($m = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, 3$).

La *somme* de deux matrices A et B est donnée par la matrice déterminée par l'égalité

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Le *produit d'une matrice A par un nombre m* est donné par la matrice déterminée par l'égalité

$$m \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

Le *produit de deux matrices A et B* (AB) est défini par l'égalité

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}.$$

On voit que l'*élément situé dans la i-ième ligne et la k-ième colonne de la matrice produit est égal à la somme des produits des éléments correspondants de la i-ième ligne de la matrice A et de la k-ième colonne de la matrice B.*

Le produit de deux matrices n'est pas soumis à la loi commutative, c'est-à-dire $AB \neq BA$.

Le *déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices.*

On appelle *matrice nulle* une matrice dont tous les éléments sont nuls:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

La somme de cette matrice et de n'importe quelle matrice A est égale à la matrice A : $A + 0 = A$.

On appelle *matrice unité* la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En multipliant cette matrice à gauche ou à droite par la matrice A, on obtient la matrice A : $EA = AE = A$. A la matrice unité il correspond la transformation linéaire identique:

$$x = x',$$
$$y = y',$$
$$z = z',$$

Toute matrice carrée régulière ($D_A \neq 0$) A possède une dite matrice inverse (elle est donc inversible).

La matrice B est la matrice *inverse* d'une matrice A si le produit AB est égal à la matrice unité: $AB = E$.

Par rapport à la matrice A, la matrice inverse se note A^{-1}.

La matrice inverse est donnée par la formule

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D_A} & \frac{A_{21}}{D_A} & \frac{A_{31}}{D_A} \\ \frac{A_{12}}{D_A} & \frac{A_{22}}{D_A} & \frac{A_{32}}{D_A} \\ \frac{A_{13}}{D_A} & \frac{A_{23}}{D_A} & \frac{A_{33}}{D_A} \end{pmatrix},$$

où A_{mn} est le *cofacteur* de l'élément a_{mn} du déterminant de la matrice A, c'est-à-dire le produit du mineur d'ordre 2, obtenu par suppression de la m-ième ligne et de la n-ième colonne dans le déterminant de la matrice A, par $(-1)^{m+n}$.

Le produit des matrices A et A^{-1} jouit de la loi commutative, c'est-à-dire $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

La matrice ci-dessous est appelée *matrice colonne*:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Le produit AX est donné par l'égalité

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

peut être mis sous la forme $AX = B$, où

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est de la forme $X = A^{-1}\cdot B$ (si $D_A \neq 0$).

L'*équation caractéristique* de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

est

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Les racines λ_1, λ_2, λ_3 de cette équation sont appelées *nombres caractéristiques* de la matrice. Elles sont toujours réelles si la matrice initiale est symétrique.

Le système d'équations

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3=0, \\ a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda)\,\xi_2+a_{23}\xi_3=0, \\ a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+(a_{33}-\lambda)\,\xi_3=0 \end{cases}$$

où λ prend l'une des valeurs λ_1, λ_2, λ_3 et dont le déterminant, en vertu de ce fait, est égal à zéro, définit un triplet de nombres (ξ_1, ξ_2, ξ_3) qui correspond au nombre caractéristique donné.

Le triplet (ξ_1, ξ_2, ξ_3) définit le vecteur $\mathbf{r} = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k}$ appelé *vecteur propre* de la matrice.

394. Trouver la somme des matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S o l u t i o n. On a

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

395. Trouver la matrice $2A + 5B$ si

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution. On a

$$2A=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 8 & 2\end{pmatrix},\quad 5B=\begin{pmatrix}10 & 15\\ 5 & -10\end{pmatrix},\quad 2A+5B=\begin{pmatrix}16 & 25\\ 13 & -8\end{pmatrix}.$$

396. Trouver les produits des matrices AB et BA si

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Solution. On a

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot2+3\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot1+3(-1)+1\cdot2 & 1\cdot0+3\cdot2+1\cdot1\\ 2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3 & 2\cdot1+0(-1)+4\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1\\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2(-1)+3\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8 & 0 & 7\\ 16 & 10 & 4\\ 13 & 5 & 7\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot0+0\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot4+0\cdot3\\ 1\cdot1-1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3-1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot1-1\cdot4+2\cdot3\\ 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot3+2\cdot0+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 6 & 6\\ 1 & 7 & 3\\ 8 & 11 & 14\end{pmatrix}.$$

397. Trouver A^3 si $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

Solution. Il faut avoir en vue que

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m \text{ fois}}.$$

On obtient

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2 & 6+8\\ 3+4 & 2+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33+14 & 22+56\\ 21+18 & 14+72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}.$$

398. On donne la transformation linéaire

$$x=x'+y'+z',$$
$$y=x'+y',$$
$$z=x'$$

et les points (1; —1; 1), (3; —2; —1), (—1; —2; —3) dans le système de coordonnées $\{x', y', z'\}$. Déterminer les coordonnées de ces points dans le système de coordonnées $\{x, y, z\}$.

Solution. En portant les coordonnées des points dans les égalités qui déterminent la transformation linéaire donnée, on obtient: si $x' = 1$, $y' = -1$, $z' = 1$, alors $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, c'est-à-dire (1; 0; 1); si $x' = 3$, $y' = -2$, $z' = -1$, alors $x = 0$, $y = 1$, $z = 3$, c'est-à-dire (0; 1; 3); si $x' = -1$, $y' = -2$, $z' = -3$, alors $x = -6$, $y = -3$, $z = -1$, c'est-à-dire (—6; —3; —1).

399. Ecrire la transformation linéaire de l'exemple précédent en passant du système de coordonnées $\{x, y, z\}$ au système $\{x', y', z'\}$.

Solution. On a:

$x' = z$ (d'après la troisième égalité);

$y' = y - z$ (on soustrait la troisième égalité de la deuxième);

$z' = x - y$ (on soustrait la deuxième égalité de la première).

400. On donne la transformation linéaire.

$$x = x' + 2y',$$
$$y = 3x' + 4y'.$$

Quels sont les points où cette transformation linéaire ne fait pas changer les coordonnées?

Solution. Il faut trouver x et y si $x = x'$, $y = y'$, ou $x = x + 2y$, $y = 3x + 4y$. Par suite, $x = x' = 0$, $y = y' = 0$.

401. Quels sont les points où la transformation linéaire

$$x = 3x' - 2y',$$
$$y = 5x' - 4y'$$

ne fait pas changer les coordonnées?

Solution. On a $x = 3x - 2y$, $y = 5x - 4y$. Par suite, $x = y = x' = y'$, c'est-à-dire la transformation linéaire ne fait pas changer les coordonnées aux points $(t; t)$ dont les coordonnées sont égales entre elles.

402. Trouver la valeur du polynôme matriciel

$$2A^2 + 3A + 5E \text{ pour } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } E \text{ est une}$$

matrice unité d'ordre 3.

Solution. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$2A^2=\begin{pmatrix}20 & 12 & 10\\ 16 & 22 & 12\\ 18 & 16 & 20\end{pmatrix},\quad 3A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 3\\ 12 & 3 & 3\end{pmatrix},$$

$$5E=5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix},$$

$$2A^2+3A+5E=\begin{pmatrix}28 & 15 & 16\\ 19 & 36 & 15\\ 30 & 19 & 28\end{pmatrix}.$$

403. On donne deux transformations linéaires

$$x=a_{11}x'+a_{12}y' \qquad x'=b_{11}x''+b_{12}y'',$$
$$\text{et}$$
$$y=a_{21}x'+a_{22}y' \qquad y'=b_{21}x''+b_{22}y''.$$

En portant x' et y' de la deuxième transformation dans la première, on obtient une transformation linéaire où x et y sont exprimées en fonction de x'' et y''. Montrer que la matrice de la transformation obtenue est égale au produit des matrices de la première et de la deuxième transformations.

Solution. On a

$$x=a_{11}(b_{11}x''+b_{12}y'')+a_{12}(b_{21}x''+b_{22}y'')=$$
$$=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x''+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})y'',$$
$$y=a_{21}(b_{11}x''+b_{12}y'')+a_{22}(b_{21}x''+b_{22}y'')=$$
$$=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x''+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})y''.$$

La matrice de la transformation linéaire obtenue est de la forme

$$\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix},$$

or, cette matrice représente le produit des matrices

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}.$$

404. On donne la matrice $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Trouver ses nombres caractéristiques et ses vecteurs propres.

Solution. Formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \text{ou} \quad (5-\lambda)(3-\lambda)-8=0,$$

c'est-à-dire $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$. Les nombres caractéristiques seront $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$. En partant du système d'équations

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)\,\xi_1' + 2\xi_2' = 0, \\ 4\xi_1' + (3-\lambda_1)\,\xi_2' = 0, \end{cases}$$

on trouve le vecteur propre correspondant au premier nombre caractéristique. Etant donné que $\lambda_1 = 1$, la relation qui lie ξ_1' et ξ_2' est la suivante : $2\xi_1' + \xi_2' = 0$.

Posons $\xi_1' = \alpha$ (α est un nombre arbitraire) ; on obtient $\xi_2' = -2\alpha$ et le vecteur propre correspondant au premier nombre caractéristique $\lambda_1 = 1$ sera $\mathbf{r}_1 = \alpha\mathbf{i} - 2\alpha\mathbf{j}$.

Trouvons le deuxième vecteur propre. On a

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)\,\xi_1'' + 2\xi_2'' = 0, \\ 4\xi_1'' + (3-\lambda_2)\,\xi_2'' = 0. \end{cases}$$

En substituant dans ce système la valeur de $\lambda_2 = 7$, on arrive à la relation $\xi_1'' - \xi_2'' = 0$, c'est-à-dire $\xi_1'' = \xi_2'' = \beta$. Le vecteur propre correspondant au deuxième nombre caractéristique sera $\mathbf{r}_2 = \beta\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$.

405. Trouver les nombres caractéristiques et les vecteurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

S o l u t i o n. Formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(3-\lambda)\,[(5-\lambda)(3-\lambda) - 1] + (-3 + \lambda + 1) + (1 - 5 + \lambda) = 0.$$

Quelques transformations élémentaires nous permettent d'écrire cette équation sous la forme

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0,$$

d'où

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$$

On obtient le vecteur propre correspondant au nombre caractéristique $\lambda_1 = 2$.

En partant du système d'équations

$$\begin{cases} \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0, \\ -\xi_1' + 3\xi_2' - \xi_3' = 0, \\ \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0 \end{cases}$$

(l'une des équations de ce système se déduit des deux autres et peut donc être écartée), on a $\xi_2' = 0$, $\xi_3' = -\xi_1'$. On pose $\xi_1' = \alpha$; alors $\xi_2' = 0$, $\xi_3' = -\alpha$ et $\mathbf{r}_1 = \alpha\mathbf{i} - \alpha\mathbf{k}$.

On trouve le vecteur propre correspondant à $\lambda_2 = 3$. On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} -\xi_2'' + \xi_3'' = 0, \\ -\xi_1'' + 2\xi_2'' - \xi_3'' = 0, \\ \xi_1'' - \xi_2'' = 0 \end{cases}$$

(l'une de ces équations se déduit des deux autres) d'où l'on tire $\xi_1'' = \xi_2'' = \xi_2'' = \beta$ et $\mathbf{r}_2 = \beta\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$.

On trouve le vecteur propre correspondant à $\lambda_3 = 6$. Formons le système d'équations

$$\begin{cases} -3\xi_1''' - \xi_2''' + \xi_3''' = 0, \\ -\xi_1''' - \xi_2''' - \xi_3''' = 0, \\ \xi_1''' - \xi_2''' - 3\xi_3''' = 0 \end{cases}$$

(on voit à nouveau que l'une des équations données se déduit des deux autres).

En résolvant ce système, on obtient $\xi_1''' = \gamma$, $\xi_2''' = -2\gamma$, $\xi''' = \gamma$ et $\mathbf{r}_3 = \gamma\mathbf{i} - 2\gamma\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$.

Ainsi, les vecteurs propres de la matrice donnée sont:

$$\mathbf{r}_1 = \alpha(\mathbf{i} - \mathbf{k});\ \mathbf{r}_2 = \beta(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k});\ \mathbf{r}_3 = \gamma(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

où α, β, γ sont des facteurs arbitraires différents de zéro.

406. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver la matrice inverse.

Solution. On calcule le déterminant de la matrice A:

$$D_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Les cofacteurs des éléments de ce déterminant sont les suivants:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=9,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4.$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1.$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-12,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7.$$

Par conséquent,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}9/5 & -2/5 & -4/5\\ 1/5 & 2/5 & -1/5\\ -12/5 & 1/5 & 7/5\end{pmatrix}.$$

407. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases}2x+3y+2z=9,\\ x+2y-3z=14,\\ 3x+4y+z=16,\end{cases}$$

en le mettant sous forme d'équation matricielle.

S o l u t i o n. Ecrivons le système sous la forme $AX=B$, où

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9\\ 14\\ 16\end{pmatrix}.$$

La solution de l'équation matricielle est de la forme $X=A^{-1}\cdot B$. On calcule A^{-1}. On a

$$D_A=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}=28-30-4=-6.$$

Calculons les cofacteurs de ce déterminant:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=14,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-13.$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-10,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=8.$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1.$$

Par suite,

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

d'ou

$$X=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}126 & +70 & -208\\ -90 & -56 & +128\\ -18 & +14 & +16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\ -18\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix}.$$

Donc, $x=2$, $y=3$, $z=-2$.

408. Normer le vecteur $\mathbf{x}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+12\mathbf{k}$.

S o l u t i o n. Normer le vecteur $\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{i}+\xi_2\mathbf{j}+\xi_3\mathbf{k}$ veut dire trouver le vecteur unitaire ayant le même sens et direction que le vecteur donné. Ce vecteur unitaire sera

$$\mathbf{x}_0=\frac{\xi_1\mathbf{i}+\xi_2\mathbf{j}+\xi_3\mathbf{k}}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}$$

Dans notre cas, $\mathbf{x}_0=\frac{3}{13}\mathbf{i}+\frac{4}{13}\mathbf{j}+\frac{12}{13}\mathbf{k}$.

§ 3. Réduction à la forme canonique des équations générales des courbes du second degré (des coniques) et des surfaces du second degré (des quadriques)

Les expressions

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

et

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+3a_{23}yz$$

sont appelées *formes quadratiques* respectivement à deux et à trois variables.

Les matrices symétriques

$$A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad a_{21} = a_{12},$$

et

$$A_3^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ où } a_{21} = a_{12},\ a_{31} = a_{13} \quad \text{et} \quad a_{32} = a_{23},$$

sont appelées matrices de ces formes.

Par une transformation linéaire des variables, les formes quadratiques peuvent être transformées en formes qui ne contiennent pas de produits des nouvelles variables (on dit, dans ce cas, qu'elles sont réduites à une somme algébrique des carrés) ; autrement dit, la forme quadratique à deux variables s'écrit

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

alors que la forme quadratique à trois variables peut s'écrire

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Dans ce cas, les coefficients λ_1, λ_2, λ_3 représentent les *nombres caractéristiques* des matrices des formes correspondantes.

La transformation linéaire correspondante des variables peut être trouvée de la façon suivante : on détermine le triplet (pour une forme quadratique à deux variables, le couple) de vecteurs propres deux à deux orthonormés associés aux nombres caractéristiques λ_1, λ_2, λ_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \alpha_1 \mathbf{i} + \beta_1 \mathbf{j} + \gamma_1 \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_2 &= \alpha_2 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \gamma_2 \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_3 &= \alpha_3 \mathbf{i} + \beta_3 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Etant donné que les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sont orthonormés, les identités

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3;$$
$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j$$

doivent être vérifiées. Alors la matrice de transformation des variables prend la forme

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

autrement dit, il faut poser

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{aligned}$$

(Toutes ces formules deviennent plus simples lorsqu'il s'agit de deux variables). Une telle transformation des variables est appelée transformation linéaire orthogonale, le déterminant de sa matrice S étant égal à ± 1 ($D_S = \pm 1$.)

C'est justement cette transformation qui est utilisée pour mettre sous forme canonique l'équation générale d'une courbe ou d'une surface du second degré. Dans ce cas, si l'on désire conserver l'orientation réciproque des nouveaux axes de coordonnées, la matrice S de la transformation doit satisfaire à une condition supplémentaire : $D_S = +1$.

La réduction de l'équation d'une courbe ou d'une surface du second degré à la forme canonique se fait comme suit :

a) on trouve la transformation linéaire orthogonale des coordonnées, qui amène la forme quadratique des termes de degré le plus élevé dans l'équation de la courbe ou de la surface à la somme des carrés, et l'on effectue la substitution correspondante dans l'équation. Cela permet d'éliminer les termes contenant les produits de coordonnées;

b) ensuite, on effectue une translation des nouveaux axes de coordonnées (dans l'espace, il est parfois nécessaire d'effectuer une rotation supplémentaire de deux axes dans l'un des plans de coordonnées) et l'on amène l'équation à la forme canonique requise.

409. Mettre sous forme canonique l'équation de la courbe du second degré ci-dessous:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Solution. Dans ce cas, la matrice des termes de degré le plus élevé est:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

On forme l'équation caractéristique de la matrice

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$.

On trouve les nombres caractéristiques $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$. En posant $\lambda_1 = 4$, pour déterminer le vecteur propre correspondant, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire $\xi_1 = -2\xi_2$; en posant $\xi_2 = -\alpha$, il vient $\xi_1 = 2\alpha$ et $\mathbf{r}_1 = \alpha(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$. On norme le vecteur $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}.$$

En posant $\lambda_2 = 9$, pour déterminer le deuxième vecteur propre, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} -4\eta_1 + 2\eta_2 = 0, \\ 2\eta_1 - \eta_2 = 0, \end{cases}$$

d'où l'on a $\eta_2 = 2\eta_1$ et $\mathbf{r}_2 = \beta(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$. En normant ce dernier, on a

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j},$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont orthogonaux:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0.$$

Utilisons maintenant les vecteurs propres orthonormés pour former la matrice de la transformation des coordonnées

$$S=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}; \quad D_S=+1.$$

D'où l'on a

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y', \quad y=-\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'.$$

Portons les valeurs de x et de y dans l'équation de la courbe:

$$5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2-$$
$$-32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)-56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+80=0.$$

En ouvrant les parenthèses et en réduisant les termes semblables, on trouve

$$4x'^2+9y'^2-\frac{8}{\sqrt{5}}x'-\frac{144}{\sqrt{5}}y'+80=0.$$

Remarquons que, dans l'équation transformée, les coefficients de x'^2 et de y'^2 (il fallait d'ailleurs s'y attendre) sont représentés par les nombres caractéristiques λ_1 et λ_2. Ecrivons cette équation comme suit:

$$4\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}x'\right)+9\left(y'-\frac{16}{\sqrt{5}}y'\right)+80=0.$$

Complétons les expressions entre parenthèses de façon à obtenir des carrés parfaits

$$4\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)+9\left(y'^2\frac{16}{\sqrt{5}}y'+\frac{64}{5}-\frac{64}{5}\right)+80=0,$$

ou

$$4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{576}{5}+80=0,$$

ou finalement

$$4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=36.$$

Effectuons une translation des axes de coordonnées en posant

$$x''=x'-\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y''=y'-\frac{8}{\sqrt{5}};$$

on obtient

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36,$$

ou

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

(c'est l'équation canonique d'une ellipse).

410. Mettre sous forme canonique l'équation de la courbe ci-dessous :

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 225 = 0.$$

Solution. L'équation caractéristique est de la forme

$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0$, ou $\lambda^2 - 25\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$.

Pour $\lambda = 0$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} 9\xi_1 + 12\xi_2 = 0, \\ 12\xi_1 + 16\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Chacune de ces équations se réduit à $\frac{\xi_1}{4} = \frac{\xi_2}{-3}$. Par suite, le vecteur propre de la matrice sera $\mathbf{r} = \alpha\,(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$ et le vecteur propre normé $\mathbf{e}_1$ sera obtenu pour $\alpha = \frac{1}{5}$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}.$$

Pour $\lambda = 25$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} -16\eta_1 + 12\eta_2 = 0, \\ 12\eta_1 - 9\eta_2 = 0. \end{cases}$$

Ce système nous permet de trouver d'une façon analogue le deuxième vecteur propre normé $\mathbf{e}_2 = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$ $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0)$.

La matrice de la transformation des coordonnées est de la forme

$$S = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} (D_S = +1);$$

et les formules de transformation sont

$$x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y',$$

$$y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'.$$

En récrivant l'équation de la courbe sous la forme

$$(3x + 4y)^2 - 230x + 110y - 225 = 0,$$

on passe aux nouvelles coordonnées :

$$25y'^2 - 230\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 110\left(-\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right) - 225 = 0.$$

On réduit les termes semblables et l'on simplifie par 25 pour aboutir à l'équation

$$y'^2 - 10x' - 2y' - 9 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire $(y' - 1)^2 = 10(x' + 1)$. On effectue une translation des axes de coordonnées et l'on choisit $O'(-1;\ 1)$ comme nouvelle origine. Cela nous amène à l'équation canonique de la courbe donnée : $y''^2 = 10x''$ (c'est une parabole).

411. Mettre sous forme canonique l'équation de la surface suivante :

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x - 10 = 0.$$

S o l u t i o n. Dans ce cas, la matrice des termes de degré le plus élevé figurant dans l'équation de la surface est de la forme

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

les nombres caractéristiques de la matrice sont déterminés en partant de l'équation

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

qui est amenée à la forme $(3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$; on en tire $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Pour $\lambda = 2$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ -u_1 + 3u_2 - u_3 = 0, \\ u_1 - u_2 + u_3 = 0. \end{cases}$$

A cette valeur de λ il correspond le vecteur propre $(\alpha;\ 0;\ -\alpha)$. Le vecteur propre normé sera $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$.

Pour $\lambda = 3$, on a le système

$$\begin{cases} -v_2 + v_3 = 0, \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 = 0, \\ v_1 - v_2 = 0, \end{cases}$$

et l'on trouve le deuxième vecteur propre normé

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}.$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont orthogonaux: $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$.

Pour $\lambda = 6$, on obtient le système

$$\begin{cases} -3w_1 - w_2 + w_3 = 0, \\ -w_1 - w_2 - w_3 = 0, \\ w_1 - w_2 - 3w_3 = 0. \end{cases}$$

Le troisième vecteur propre normé sera

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k},$$

les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ étant deux à deux orthogonaux: $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. On trouve la matrice de la transformation des coordonnées

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Les formules de transformation des coordonnées ainsi obtenues seront

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x' + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{1}{\sqrt{6}}\,z',$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' - \frac{2}{\sqrt{6}}\,z',$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,x' + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{1}{\sqrt{6}}\,z'.$$

Portons les valeurs de x, y, z dans l'équation de la surface:

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x' + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{1}{\sqrt{6}}\,z'\right)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,y' - \frac{2}{\sqrt{6}}\,z'\right)^2 +$$
$$+ 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,x' + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{1}{\sqrt{6}}\,z'\right)^2 -$$

$$-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)+$$
$$+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)-$$
$$-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)-$$
$$-12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)-10=0,$$

ou

$$2x'^2+3y'^2+6z'^2-6\sqrt{2}x'-4\sqrt{3}y'-2\sqrt{6}z'-10=0.$$

Les coefficients de x'^2, y'^2 et z'^2, comme il fallait s'y attendre, sont respectivement les nombres λ_1, λ_2, λ_3. Ecrivons l'équation comme suit

$$2\left(x'^2-\frac{6}{\sqrt{2}}x'\right)+3\left(y'^2-\frac{4}{\sqrt{3}}y'\right)+6\left(z'^2-\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)=10;$$

après avoir complété les expressions entre parenthèses de façon à obtenir des carrés parfaits, on a

$$2\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(y'-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+6\left(z'-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=24.$$

En effectuant une translation des axes de coordonnées, il vient:

$$x'=x''+\frac{3}{\sqrt{2}},\quad y'=y''+\frac{2}{\sqrt{3}},\quad z'=z''+\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

En divisant l'équation par 24, on obtient l'équation canonique d'un ellipsoïde:

$$\frac{x''^2}{12}+\frac{y''^2}{8}+\frac{z''^2}{4}=1.$$

412. On donne la matrice

$$A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 7 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice B telle que la somme $A+B$ donne la matrice unité.

Réponse. $$B=\begin{pmatrix}-4 & -8 & -4\\ -3 & -1 & -5\\ -7 & -6 & 1\end{pmatrix}.$$

413. On donne la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Calculer la somme des matrices A^2+A+E.

Réponse. $$\begin{pmatrix}9 & 6 & 6\\ 6 & 9 & 6\\ 6 & 6 & 9\end{pmatrix}.$$

414. On a la matrice

$$A=\begin{pmatrix}10 & 20 & -30\\ 0 & 10 & 20\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}.$$

Trouver son inverse.

Réponse. $$\begin{pmatrix}1/10 & -1/5 & 7/10\\ 0 & 1/10 & -1/5\\ 0 & 0 & 1/10\end{pmatrix}.$$

415. Deux transformations linéaires sont données:

$$\begin{aligned} x&=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z', & x'&=b_{11}x''+b_{12}y''+b_{13}z'',\\ y&=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z', \text{ et } & y'&=b_{21}x''+b_{22}y''+b_{23}z'',\\ z&=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z' & z'&=b_{31}x''+b_{32}y''+b_{33}z''. \end{aligned}$$

En portant x', y', z' de la deuxième transformation dans la première, on obtient une transformation linéaire où x, y, z sont exprimées par x'', y'', z''. Montrer que la matrice de la transformation ainsi obtenue est égale au produit des matrices de la première et de la deuxième transformations.

416. Trouver les nombres caractéristiques et les vecteurs propres normés de la matrice $\begin{pmatrix}7 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

Réponse. $\lambda_1=2$, $\lambda_2=11$; $\mathbf{e}_1=\frac{4}{\sqrt{41}}\mathbf{i}-\frac{5}{\sqrt{41}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+$ $+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.

417. Trouver les nombres caractéristiques et les vecteurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Réponse. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$; $\mathbf{r}_1 = \alpha(\mathbf{i} - \mathbf{k})$; $\mathbf{r}_2 = \beta(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{r}_3 = \gamma(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

418. Mettre sous forme canonique l'équation de la courbe du second degré

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

Réponse. $\frac{x''^2}{16} + \frac{y''^2}{4} = 1$.

419. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 5y + 6z = 28, \\ x + 2z = 7, \end{cases}$$

en le mettant sous forme d'équation matricielle.

Réponse. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

420. Mettre sous forme canonique l'équation de la courbe du second degré

$$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$$

Réponse. $\frac{x''^2}{25} - \frac{y''^2}{9} = 1$.

421. Mettre sous forme canonique l'équation de la courbe du second degré

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0.$$

Réponse. $y''^2 = 2\sqrt{2}x''$.

422. Mettre sous forme canonique l'équation de la surface du second degré

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 6 = 0.$$

Indication. Les formules de transformation des coordonnées sont les suivantes:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z',$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y',$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'.$$

Réponse. $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} - \frac{z'^2}{3} = 1$ (hyperboloïde à une nappe).

423. Mettre sous forme canonique l'équation de la surface du second degré

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0.$$

Indication. Les formules de transformation des coordonnées sont

$$x = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z', \quad x' = x'',$$

$$y = -\frac{2}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}z', \quad y' = y'' + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z', \quad z' = z'' + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Réponse. $2y''^2 + 3z''^2 = \sqrt{6}x''$ (paraboloïde elliptique).

424. On donne la transformation linéaire

$$x = 6x' + y' - 2z',$$
$$y = -18x' + 2y' + 6z',$$
$$z = 2x' + 2y'.$$

Quels sont les points dont les coordonnées seront doublées à la suite de cette transformation?

Réponse. $(t;\ 2t;\ 3t)$, où t est un nombre réel arbitraire.

425. On donne deux transformations linéaires:

$$\begin{aligned} x &= x' + y' + 2z', \\ y &= x' + 2y' + 6z', \\ z &= 2x' + 3y' \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} x &= 2x' + 2z', \\ y &= x' + 3y' + 4z', \\ z &= x' + 3y' + 2z'. \end{aligned}$$

Trouver les points pour lesquels chacune de ces transformations donne le même résultat.

Réponse. $(2t;\ 2t;\ t)$, où t est un nombre réel arbitraire.

426. Trouver les points dont les coordonnées ne sont pas changées par la transformation linéaire:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Réponse. $(0;\ 0)$.

427. Trouver le lieu géométrique des points dont les coordonnées sont permutées par la transformation linéaire ci-dessous:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Réponse. La droite $x' \cos\alpha - y'(1 + \sin\alpha) = 0$.

§ 4. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes

On donne une matrice rectangulaire

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Séparons dans cette matrice k lignes et k colonnes arbitraires ($k \leqslant m$, $k \leqslant n$). Le déterminant d'ordre k constitué par les éléments de la matrice A disposés aux points d'intersection des lignes et des colonnes séparées est appelé *mineur* d'ordre k de la matrice A. La matrice A possède $C_m^k \cdot C_n^k$ mineurs d'ordre k.

Examinons tous les mineurs possibles différents de zéro de la matrice A. On appelle *rang* de la matrice A l'ordre le plus élevé dont bénéficie l'un (ou plusieurs) de ses mineurs différents de zéro. Si tous les éléments de la matrice sont nuls, cette matrice est de rang zéro.

Tout mineur non nul dont l'ordre est égal au rang de la matrice à laquelle il appartient est appelé *mineur de base* de cette matrice.

Désignons par $r(A)$ le rang de la matrice A. Si $r(A) = r(B)$, on dit que les matrices A et B sont équivalentes, ce qui se note $A \sim B$.

Il est utile d'avoir en vue que le rang d'une matrice ne varie pas à la suite des transformations élémentaires telles que:

1) remplacement des lignes par des colonnes et des colonnes par les lignes correspondantes;
2) transposition des lignes de la matrice;
3) suppression d'une ligne dont tous les éléments sont nuls;
4) multiplication d'une ligne quelconque par un nombre différent de zéro;
5) addition aux éléments d'une ligne des éléments correspondants d'une autre ligne.

428. Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

S o l u t i o n. Tous les mineurs d'ordre 2 et 3 de cette matrice sont nuls, car les éléments des lignes de ces mineurs sont proportionnels, alors que les mineurs d'ordre 1 (les éléments mêmes de la matrice) sont différents de zéro. Il s'ensuit que le rang de la matrice est égal à 1.

429. Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

S o l u t i o n. En supprimant dans cette matrice la deuxième ligne d'abord, la deuxième, la troisième et la quatrième colonnes

ensuite, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ qui est équivalente de la matrice donnée. Vu que $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, la matrice donnée est de rang 2.

430. Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

S o l u t i o n. Additionnons les éléments correspondants de la première et de la troisième lignes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Divisons par 4 les éléments de la première ligne:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soustrayons des éléments de la première ligne les éléments correspondants de la deuxième ligne:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Supprimons la première ligne:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice est de rang 2, car, par exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Il s'ensuit que la matrice donnée est aussi de rang 2.

431. Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

S o l u t i o n. Soustrayons des éléments de la quatrième colonne les éléments de la troisième colonne:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supprimons la quatrième colonne

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vu que

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0,$$

la matrice est de rang 3.

432. On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de cette matrice et trouver ses mineurs de base.

S o l u t i o n. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \; r(A) = 2.$$

Les mineurs de base de cette matrice sont ses mineurs d'ordre 2 différents de zéro:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

On voit ainsi que la matrice A possède 8 mineurs de base.

433. Combien de mineurs d'ordre 2 la matrice ci-dessous a-t-elle?

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ecrire tous les mineurs d'ordre 2 de cette matrice.

Solution. La matrice donnée possède $C_3^2 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ mineurs d'ordre 2 que voici:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

434. Déterminer le rang de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}.$$

Réponse. $r(A) = 0$ si $\lambda = 0$; $r(A) = 2$ si $\lambda \neq 0$.

435. Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Réponse. $r(A) = 3$.

436. Déterminer le rang et trouver les mineurs de base de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse. $r(A) = 3$; les mineurs de base sont:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

437. Déterminer le rang et trouver les mineurs de base de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Réponse. $r(A)=2$; les mineurs de base sont:

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 8\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & 8\\ 1 & 4\end{vmatrix}.$$

§ 5. Etude d'un système de m équations linéaires à n inconnues

On donne un système de m équations linéaires à n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

La solution de ce système est représentée par un ensemble de n nombres $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ qui, substitués aux inconnues dans les équations du système, transforment celles-ci en identités. Le système est dit *compatible* s'il admet au moins une solution $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. Si le système n'admet aucune solution, il est *incompatible*.

Un système compatible est dit *déterminé* lorsqu'il admet une solution unique; s'il y a plusieurs solutions, le système est *indéterminé*.

La matrice

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

est appelée *matrice du système* (1).

La matrice

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

est appelée *matrice complète du système* (1).

Pour que le système (1) *soit compatible, il faut et il suffit que le rang de sa matrice soit égal au rang de sa matrice complète* (*théorème de Kronecker-Capelli*). Donc, le système (1) est compatible si, et seulement si, $r(A)=r(A_1)=r$.

Dans ce cas, le nombre r est appelé *rang du système* (1). Si $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, le système d'équations linéaires (1) est *homogène*. Un système d'équations homogène est toujours compatible.

Si le rang d'un système compatible est égal au nombre d'inconnues (c'est-à-dire si $r = n$), le système sera déterminé.

Mais si le rang d'un système compatible est inférieur au nombre d'inconnues, le système sera indéterminé. Examinons ce dernier cas. Supposons que le système (1) soit compatible et que $r < n$. Considérons un mineur de base quelconque de la matrice A et prenons une ligne arbitraire de ce mineur. Les éléments de la ligne considérée représentent les coefficients de r inconnues dans l'une des équations du système (1). Ces r inconnues sont appelées *inconnues de base* du système d'équations considéré, les autres $n - r$ inconnues du système (1) étant des *inconnues libres*.

Séparons du système (1) un système de r équations parmi les coefficients desquelles se trouvent les éléments du mineur de base. Laissons dans les premiers membres les inconnues de base du système précédemment séparé et faisons passer dans les deuxièmes membres les termes à inconnues libres. En partant du système d'équations ainsi obtenu, déterminons les inconnues de base en fonction des inconnues libres (en utilisant, par exemple, les formules de Cramer).

De cette façon, en attribuant aux inconnues libres des valeurs arbitraires, on peut trouver les valeurs des inconnues de base. Il s'ensuit (comme on l'a déjà dit plus haut) que le système (1) admet une infinité de solutions: $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

438. Discuter le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Solution. Déterminons les rangs de la matrice et de la matrice complète du système

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Le trait vertical sépare les éléments de la matrice du système (de la matrice A) des termes constants du système.

Ajoutons aux éléments de la deuxième ligne les éléments correspondants de la troisième ligne:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Divisons par 3 tous les éléments de la deuxième ligne:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Soustrayons des éléments de la deuxième ligne les éléments correspondants de la première ligne:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right);$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix};$$

ou

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix},$$

Il est aisé de voir que $r(A) = 2$, $r(A_1) = 3$, $r(A) \neq r(A_1)$, ce qui signifie que le système est incompatible.

439. Discuter le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

S o l u t i o n. La matrice complète du système s'écrit

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Ajoutons les éléments de la deuxième ligne aux éléments correspondants de la première et de la quatrième lignes:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Divisons respectivement par 4 et par 5 les éléments de la première et de la quatrième lignes:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Soustrayons des éléments de la troisième ligne les éléments correspondants de la première ligne, et des éléments de la cinquième ligne les éléments de la quatrième ligne:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Supprimons la troisième et la cinquième lignes:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right);$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

Trouvons le déterminant de la dernière matrice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Par suite, $r(A) = 3$. La matrice complète est également de rang 3, car le déterminant ci-dessus est un mineur de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc, le système est compatible. Pour le résoudre, prenons, par exemple, les équations:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14, \\ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=6, \\ x_1+\ \ x_2\qquad\ =3, \end{cases}$$

d'où l'on trouve sans difficulté $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

440. Discuter le système d'équations

$$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1, \\ 2x_1-\ \ x_2+2x_3-\ \ x_4=0, \\ 5x_1+3x_2+8x_3+\ \ x_4=1. \end{cases}$$

Solution. On a

$$A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Soustrayons de la troisième ligne la première:

$$A_1\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Divisons par 2 les éléments de la troisième ligne et soustrayons de la nouvelle troisième ligne ainsi obtenue la deuxième ligne:

$$A_1\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Supprimons la troisième ligne:

$$A_1\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Il est aisé de voir que $r(A) = r(A_1) = 2$. Il s'ensuit que le système est compatible.

La première et la deuxième équations de ce système s'écrivent:

$$x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1,$$
$$2x_1-\ \ x_2+2x_3-\ \ x_4=0.$$

Prenons x_1 et x_2 en qualité d'inconnues de base. Cela est possible car le déterminant constitué par les coefficients de ces inconnues $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ est différent de zéro. Les inconnues libres seront x_3 et x_4.

Ecrivons le système comme suit:

$$x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4,$$
$$2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4.$$

Exprimons x_1 et x_2 de ce système en fonction de x_3 et x_4:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-4x_3-3x_4 & 5 \\ -2x_3+x_4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4 - \frac{1}{11},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-4x_3-3x_4 \\ 2 & -2x_3+x_4 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}x_3 + \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

En posant $x_3 = u$, $x_4 = v$, on obtient la solution du système sous la forme

$$x_1 = -\frac{6}{11}u + \frac{8}{11}v - \frac{1}{11},$$
$$x_2 = -\frac{6}{11}u + \frac{7}{11}v + \frac{2}{11},$$
$$x_3 = u,$$
$$x_4 = v.$$

En attribuant à u et à v différentes valeurs numériques, on obtient différentes solutions de ce système d'équations.

441. Discuter le système d'équations

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5. \end{cases}$$

Réponse. $r(A) = r(A_1) = 2$. Le système est compatible, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

442. Discuter le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}$$

Réponse. $r(A) = 1$, $r(A_1) = 2$, $r(A) \neq r(A_1)$. Le système est incompatible.

443. Discuter le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Réponse. Le système est compatible, $r(A) = r(A_1) = 2$.

§ 6. Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss

Les déterminants sont commodes à utiliser pour trouver les solutions numériques des systèmes de deux ou de trois équations algébriques linéaires. Si le système comprend un nombre plus important d'équations, il est beaucoup plus avantageux d'appliquer la *méthode de Gauss* qui consiste dans l'élimination successive des inconnues. Ci-dessous on expose l'essentiel de cette méthode en prenant comme exemple un système de quatre équations à quatre inconnues:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u = a_{15}, & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u = a_{25}, & (2) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u = a_{35}, & (3) \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}u = a_{45}. & (4) \end{cases}$$

Supposons que $a_{11} \neq 0$ (si $a_{11} = 0$, on change l'ordre des équations de façon que dans la première équation le coefficient de x ne soit pas égal à zéro).

Première étape: a) divisons l'équation (1) par a_{11}; b) multiplions l'équation ainsi obtenue par a_{21} et soustrayons le résultat de l'équation (2); ensuite, multiplions par a_{31} et soustrayons le résultat de l'équation (3); multiplions finalement par a_{41} et soustrayons le résultat de l'équation (4). A la fin de la première étape, on arrive au système

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, & (5) \\ \quad\quad b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u = b_{25}, & (6) \\ \quad\quad b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u = b_{35}, & (7) \\ \quad\quad b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u = b_{45} & (8) \end{cases}$$

dans lequel b_{ij} sont obtenus à partir de a_{ij} à l'aide des formules:

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, 4, 5),$$

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \cdot b_{1j} \quad (i = 2, 3, 4; \ j = 2, 3, 4, 5).$$

Deuxième étape: effectuons sur les équations (6), (7), (8) les mêmes opérations que celles effectuées sur les équations (1), (2), (3), (4), et ainsi de suite. Finalement, le système initial est amené à avoir la forme appelée « forme à paliers »:

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, \\ \quad\quad y + c_{23}z + c_{24}u = c_{25}, \\ \quad\quad\quad z + d_{34}u = d_{35}, \\ \quad\quad\quad\quad u = e_{45}. \end{cases}$$

Le système ainsi transformé permet de déterminer successivement sans difficulté toutes les inconnues.

444. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 36{,}47x + 5{,}28y + 6{,}34z = 12{,}26, & (1) \\ 7{,}33x + 28{,}74y + 5{,}86z = 15{,}15, & (2) \\ 4{,}63x + 6{,}31y + 26{,}17z = 25{,}22. & (3) \end{cases}$$

Solution. En divisant par 36,47 l'équation (1), on obtient

$$x + 0{,}1447y + 0{,}1738z = 0{,}3361. \qquad (*)$$

Multiplions par 7,33 l'équation (*) et soustrayons le résultat obtenu de l'équation (2); on obtient

$$27{,}6793y + 4{,}586z = 12{,}6864;$$

multiplions maintenant par 4,63 l'équation (*) et soustrayons de l'équation (3) le résultat obtenu; cela donne

$$5{,}64y + 25{,}3653z = 23{,}6639.$$

On obtient ainsi le système d'équations

$$\begin{cases} 27{,}6793y + 4{,}586z = 12{,}6864, & (4) \\ 5{,}64y + 25{,}3653z = 23{,}6639. & (5) \end{cases}$$

En divisant par 27,68 l'équation (4), on obtient

$$y + 0{,}1657z = 0{,}4583.$$

Multiplions l'équation obtenue par 5,64 et soustrayons le résultat obtenu de l'équation (5); on a alors $24{,}4308z = 21{,}0791$. Donc, $z = 0{,}8628$.

Alors

$$y = 0{,}4583 - 0{,}1657 \cdot 0{,}8628 = 0{,}3153,$$

$$x = 0{,}3361 - 0{,}1447 \cdot 0{,}3153 - 0{,}1738 \cdot 0{,}8628 = 0{,}1405.$$

Ainsi, $x = 0{,}1405$, $y = 0{,}3153$, $z = 0{,}8628$.

Il est plus pratique de mettre sous « forme à paliers » la matrice des coefficients des inconnues et des termes constants au lieu de faire la même chose par rapport au système d'équations proprement dit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 36{,}47 & 5{,}28 & 6{,}34 & 12{,}26 \\ 7{,}33 & 28{,}74 & 5{,}86 & 15{,}15 \\ 4{,}63 & 6{,}31 & 26{,}17 & 25{,}22 \end{array}\right).$$

Introduisons encore une colonne (l'ainsi appelée *colonne témoin*) dont chaque élément représente la somme des quatre éléments de la

ligne correspondante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 35{,}47 & 5{,}28 & 6{,}34 & 12{,}26 & 60{,}35 \\ 7{,}33 & 28{,}74 & 5{,}86 & 15{,}15 & 57{,}08 \\ 4{,}63 & 6{,}31 & 26{,}17 & 25{,}22 & 62{,}33 \end{array}\right).$$

Lorsqu'on effectue des transformations linéaires des éléments de la matrice, les mêmes transformations doivent subir les éléments de la colonne témoin. On voit sans difficulté que chaque élément de la colonne témoin de la matrice transformée sera égal à la somme des éléments de la ligne correspondante. Le passage d'une matrice à l'autre sera noté par le signe d'équivalence $\sim$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 36{,}47 & 5{,}28 & 6{,}34 & 12{,}26 & 60{,}35 \\ 7{,}33 & 28{,}74 & 5{,}86 & 15{,}15 & 57{,}08 \\ 4{,}63 & 6{,}31 & 26{,}17 & 25{,}22 & 62{,}33 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 7{,}33 & 28{,}74 & 5{,}86 & 15{,}15 & 57{,}08 \\ 4{,}63 & 6{,}31 & 26{,}17 & 25{,}22 & 62{,}33 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 0 & 27{,}6793 & 4{,}586 & 12{,}6864 & 44{,}9516 \\ 0 & 5{,}64 & 25{,}3653 & 23{,}6639 & 54{,}6688 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 0 & 1 & 0{,}1657 & 0{,}4583 & 1{,}6240 \\ 0 & 5{,}64 & 25{,}3653 & 23{,}6639 & 54{,}6688 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 0 & 1 & 0{,}1657 & 0{,}4583 & 1{,}6240 \\ 0 & 0 & 24{,}4308 & 21{,}0791 & 45{,}5094 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 0 & 1 & 0{,}1657 & 0{,}4583 & 1{,}6240 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}8628 & 1{,}8629 \end{array}\right).$$

La matrice ainsi obtenue permet d'écrire le système transformé et de trouver la solution qui nous intéresse :

$$z = 0{,}8628,$$

$$y = 0{,}4583 - 0{,}1657 \cdot 0{,}8628 = 0{,}3153,$$

$$x = 0{,}3361 - 0{,}1738 \cdot 0{,}8628 - 0{,}1447 \cdot 0{,}3153 = 0{,}1405.$$

Si le système admet une solution unique, le « système à paliers » aura une forme triangulaire, c'est-à-dire sa dernière équation ne comportera qu'une seule inconnue. Si le système est indéterminé, c'est-à-

dire si le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations linéairement indépendantes, ce qui fait que le système admette une infinité de solutions, le système triangulaire ne sera pas obtenu, car la dernière équation comportera plus d'une inconnue.

Dans le cas d'un système incompatible, la « forme à paliers » comprendra au moins une équation du type $0 = 1$, c'est-à-dire une équation où toutes les inconnues ont des coefficients nuls tandis que le deuxième membre est différent de zéro. Un tel système n'a pas de solutions (c'est un système impossible).

445. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=0, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$$

Solution. Transformons la matrice donnée en une matrice équivalente

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

(pour simplifier les calculs, on a transposé la première et la deuxième équations).

Multiplions par 3 et 4 la première ligne et soustrayons le résultat obtenu des deux autres lignes:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim$$

Ajoutons à la troisième ligne la deuxième en changeant d'abord les signes de ses éléments et en la multipliant par 5:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(la dernière ligne a été divisée par -11).

Le système d'équations est ainsi ramené à la forme triangulaire:

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ y-4z=-5, \\ z=2. \end{cases}$$

Le système admet une solution unique. La dernière équation donne $z = 2$; en portant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient $y = 3$; finalement, d'après la première équation on a $x = -1$.

Résoudre les systèmes d'équations ci-après :

446.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$.

447.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

448.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$.

449.
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Réponse. Le système est incompatible.

450.
$$\begin{cases} 0{,}04x - 0{,}08y + 4z = 20, \\ 4x + 0{,}24y - 0{,}08z = 8, \\ 0{,}09x + 3y - 0{,}15z = 9. \end{cases}$$

Réponse. $x = 1{,}92$, $y = 2{,}96$, $z = 5{,}04$.

451.
$$\begin{cases} 3{,}21x + 0{,}71y + 0{,}34z = 6{,}12, \\ 0{,}43x + 4{,}11y + 0{,}22z = 5{,}71, \\ 0{,}17x + 0{,}16y + 4{,}73z = 7{,}06. \end{cases}$$

Réponse. $x = 1{,}50$, $y = 1{,}16$, $z = 1{,}40$.

§ 7. Application de la méthode de Jordan-Gauss à la résolution des systèmes d'équations linéaires

Lors de la résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss, on a examiné la méthode de la matrice à colonne témoin qui permet d'amener le système donné à un système triangulaire (voir pages 149-150). Pour

continuer l'exposé, il est essentiel de prendre connaissance de la méthode modifiée de Jordan-Gauss qui permet de trouver directement les valeurs des inconnues.

Soit un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Choisissons dans la matrice A de ce système un élément a_{qp} différent de zéro. Appelons cet élément *élément résolvant* et, par analogie, *colonne résolvante* et *ligne résolvante* respectivement la p-ième colonne et la q-ième ligne de la matrice A.

Examinons le nouveau système d'équations

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \tag{2}$$

de matrice A' dont les coefficients et les termes constants sont déterminés par les formules

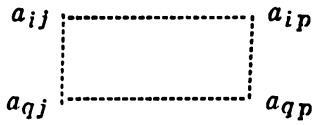
$$\left.\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{ip} \cdot a_{qj}}{a_{qp}} \\ b'_i &= b_i - \frac{a_{ip} \cdot b_q}{a_{qp}} \end{aligned}\right\} \text{ si } i \neq q.$$

En particulier, $a_{ip} = 0$ si $i \neq q$. Mais si $i = q$, on prend $a'_{qj} = a_{qj}$, $b'_q = b_q$. De cette façon les q-ièmes équations des systèmes (1) et (2) sont identiques et les coefficients de x_p dans toutes les équations du système (2), à l'exception de la q-ième équation, sont nuls.

Il faut avoir en vue que les systèmes (1) et (2) sont simultanément compatibles ou incompatibles. Si les systèmes (1) et (2) sont compatibles, ils sont équivalents (leurs solutions se confondent).

Pour déterminer l'élément a'_{ij} de la matrice A', il est utile de faire appel à l'ainsi nommée « règle du rectangle ».

Considérons 4 éléments de la matrice A : a_{ij} (élément qui doit être transformé), a_{qp} (élément résolvant) et les éléments a_{ip} et a_{qj}. Pour trouver l'élément a'_{ij}, il faut soustraire de l'élément a_{ij} le produit des éléments a_{ip} et a_{qj}, disposés aux sommets diagonalement opposés du rectangle, divisé par l'élément résolvant a_{qp},



D'une façon analogue on peut transformer le système (2), en prenant en qualité d'élément résolvant de la matrice A' l'élément $a'_{sr} \neq 0$ ($s \neq q$, $r \neq p$). Après avoir effectué cette transformation, on voit que tous les coefficients de x_r, excepté a'_{sr}, sont nuls. Le système obtenu peut être transformé de nouveau, et ainsi de suite. Si $r = n$ (le rang du système est égal au nombre d'inconnues),

les transformations effectuées aboutissent à un système de la forme

$$\begin{aligned} k_1x_1 &= l_1, \\ k_2x_2 &= l_2, \\ &\cdots\cdots \\ k_xx_n &= l_n, \end{aligned}$$

qui permet de trouver les valeurs des inconnues. La méthode de résolution qui vient d'être exposée et qui se base sur l'élimination successive des inconnues, est appelée *méthode de Jordan-Gauss.*

452. On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

d'un système d'équations linéaires. Le système d'équations est résolu par la méthode de Jordan-Gauss, où l'on prend comme élément résolvant l'élément $a_{23} = 3$. Trouver les éléments a'_{24}, a'_{13}, a'_{44} de la matrice transformée.

Solution. Etant donné que a_{24} appartient à la ligne résolvante, on a $a'_{24} = a_{24} = 2$. Etant donné que a_{13} appartient à la colonne résolvante, on a $a'_{13} = 0$. L'élément a'_{44} est déterminé d'après la règle du rectangle:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$a'_{44} = a_{44} - \frac{a_{24} \cdot a_{43}}{a_{23}} = -4 - \frac{2 \cdot 5}{3} = -7\frac{1}{3}.$$

453. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

S o l u t i o n. Ecrivons les coefficients, les termes constants et les sommes des coefficients et des termes constants (dans la colonne témoin marquée Σ):

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
$\boxed{1}$	1	—3	2	6	7
1	—2	0	—1	—6	—8
0	1	1	3	16	21
2	—3	2	0	6	7

En qualité d'élément résolvant nous avons pris le coefficient de x_1 dans la première équation. Ecrivons sans rien changer la ligne du tableau contenant le premier élément (la ligne résolvante) et remplaçons par des zéros tous les éléments de la première colonne, à l'exception de l'élément résolvant :

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	—3	2	6	7
0					
0					
0					

En appliquant la règle du rectangle au tableau 1, on remplit les cases libres du dernier tableau. La règle du rectangle est appliquée à la colonne Σ.

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	—3	2	6	7
0	—3	3	—3	—12	—15
0	1	1	3	16	21
0	—5	8	—4	—6	—7

Il faut remarquer que la colonne témoin contient les sommes des éléments figurant dans les lignes correspondantes. En divisant par —3 les éléments de la deuxième ligne, on obtient le tableau ci-dessous :

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	—3	2	6	7
0	$\boxed{1}$	—1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	—5	8	—4	—6	—7

Prenons comme élément résolvant le deuxième élément de la deuxième ligne. Ecrivons la première colonne sans changements, remplaçons par des zéros les éléments de la deuxième colonne, l'élément résolvant excepté, écrivons la deuxième ligne (ligne résolvante) sans rien changer et transformons les éléments figurant dans les autres cases du tableau suivant la règle du rectangle.

Tableau 3

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	—2	1	2	2
0	1	—1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Divisons par 2 les éléments de la troisième ligne:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	—2	1	2	2
0	1	—1	1	4	5
0	0	$\boxed{1}$	1	6	8
0	0	3	1	14	18

Transformons le tableau en prenant comme élément résolvant le troisième élément de la troisième colonne.

Tableau 4

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	—2	—4	—6

Divisons par —2 les éléments de la quatrième ligne:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	$\boxed{1}$	2	3

Transformons le tableau en prenant le quatrième élément de la quatrième ligne en qualité d'élément résolvant.

Tableau 5

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	0	8	9
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

On obtient le système d'équations:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=8, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=6, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4=4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+1\cdot x_4=2, \end{cases}$$

c'est-à-dire $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$.

454. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=1, \\ x_1-3x_2+x_3+x_4=0, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 4x_1+3x_2-4x_3-x_4=2. \end{cases}$$

Solution.

Tableau 1

$\boxed{1}$	1	—2	1	1	2
1	—3	1	1	0	0
4	—1	—1	—1	1	2
4	3	—4	—1	2	4

Le premier élément de la première colonne est l'élément résolvant.

Tableau 2

1	1	—2	1	1	2
0	—4	3	0	—1	—2
0	—5	7	—5	—3	—6
0	—1	4	—5	—2	—4

Changeons les signes dans la quatrième ligne:

1	1	—2	1	1	2
0	—4	3	0	—1	—2
0	—5	7	—5	—3	—6
0	$\boxed{1}$	—4	5	2	4

Le quatrième élément de la deuxième colonne est l'élément résolvant.

Tableau 3

1	0	2	—4	—1	—2
0	0	—13	20	7	14
0	0	—13	20	7	14
0	1	—4	5	2	4

Soustrayons de la troisième ligne la deuxième:

1	0	2	—4	—1	—2
0	0	—13	20	7	14
0	0	0	0	0	0
0	1	—4	5	2	4

La troisième ligne peut être supprimée:

1	0	2	—4	—1	—2
0	0	—13	$\boxed{20}$	7	14
0	1	—4	5	2	4

Le quatrième élément de la deuxième ligne est l'élément résolvant.

Tableau 4

1	0	—0,6	0	0,4	0,8
0	0	—13	20	7	14
0	1	—0,75	0	0,25	0,5

La matrice est de rang 3, ce qui signifie que le système possède trois inconnues de base x_1, x_2 et x_4 et une inconnue libre x_3. On obtient le système d'équations:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2-0{,}6\cdot x_3+0\cdot x_4=0{,}4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2-\ \ 13x_3+20x_4=7, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2-0{,}75x_3+0\cdot x_4=0{,}25, \end{cases}$$

d'où

$$x_1=0{,}4+0{,}6x_3,$$
$$x_2=0{,}25+0{,}75x_3,$$
$$x_4=0{,}35+0{,}65x_3.$$

La solution du système est obtenue sous la forme

$$x_1=0{,}4+0{,}6u,$$
$$x_2=0{,}25+0{,}75u,$$
$$x_3=u,$$
$$x_4=0{,}35+0{,}65u,$$

où u est un nombre arbitraire.

455. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 6x-\ \ 5y+7z+8t=3, \\ 3x+11y+2z+4t=6, \\ 3x+\ \ 2y+3z+4t=1, \\ \ \ x+\ \ \ y+\ \ z\qquad\ =0. \end{cases}$$

S o l u t i o n.

Tableau 1

6	−5	7	8	3	19
3	11	2	4	6	26
3	2	3	4	1	13
$\boxed{1}$	1	1	0	0	3

Le quatrième élément de la première colonne est l'élément résolvant.

Tableau 2

0	—11	$\boxed{1}$	8	3	1
0	8	—1	4	6	17
0	—1	0	4	1	4
1	1	1	0	0	3

Le premier élément de la troisième colonne est l'élément résolvant.

Tableau 3

0	—11	1	8	3	1
0	—3	0	12	9	18
0	—1	0	4	1	4
1	12	0	—8	—3	2

Changeons les signes des éléments de la troisième ligne. Le troisième élément de la deuxième colonne est l'élément résolvant :

0	—11	1	8	3	1
0	—3	0	12	9	18
0	$\boxed{1}$	0	—4	—1	—4
1	12	0	—8	—3	2

Tableau 4

0	0	1	—36	—8	—43
0	0	0	0	6	6
0	1	0	—4	—1	—4
1	0	0	40	9	50

On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z-36t=-8, \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0\cdot t=6, \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z-4\cdot t=-1, \\ 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+40t=9. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que la deuxième équation ne peut pas être vérifiée par les valeurs que l'on pourrait donner à x, y, z et t. De cette façon, le système d'équations obtenu et le sytème donné sont incompatibles.

456. Appliquer la méthode de Jordan-Gauss pour déterminer le rang de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution.

Tableau 1

7	—1	3	5	14
$\boxed{1}$	3	5	7	16
4	1	4	6	15
3	—2	—1	—1	—1

Dans la dernière colonne (colonne témoin) on écrit les sommes des éléments des lignes correspondantes. Le deuxième élément de la première colonne est l'élément résolvant.

Tableau 2

0	—22	—32	—44	—98
1	3	5	7	16
0	—11	—16	—22	—49
0	—11	—16	—22	—49

Divisons les éléments de la première ligne par —2:

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16
0	11	16	22	49
0	11	16	22	49

Soustrayons des éléments de la quatrième et de la troisième lignes les éléments correspondants de la première ligne:

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

En supprimant la troisième et la quatrième lignes, on obtient le tableau :

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16

Tout déterminant d'ordre 2 de la matrice obtenue est différent de zéro. Il s'ensuit que $r(A) = 2$.

457. Résoudre le système d'équations ci-dessous par la méthode de Jordan-Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

458. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = u$, $x_2 = u + 1$, $x_3 = u + 2$, $x_4 = u + 3$.

459. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

Réponse. Le système est incompatible.

460. Déterminer le rang de la matrice ci-dessous en appliquant la méthode de Jordan-Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Réponse. $r(A) = 3$.

CHAPITRE V

INTRODUCTION À L'ANALYSE

§ 1. Erreur absolue et erreur relative

Soit a un nombre approché qui figure dans les calculs à la place d'un nombre exact A.

On appelle *erreur absolue* du nombre approché a la valeur absolue de la différence

$$|A - a|.$$

On appelle *erreur absolue limite* le plus petit nombre possible Δ qui vérifie l'inégalité

$$|A - a| \leqslant \Delta.$$

Le nombre exact A se trouve entre les bornes

$$a - \Delta \leqslant A \leqslant a + \Delta, \quad \text{ou} \quad A = a \pm \Delta.$$

On appelle *erreur relative* du nombre approché a le rapport de l'erreur absolue de ce nombre au nombre exact correspondant :

$$\frac{|A-a|}{A}.$$

On appelle *erreur relative limite* le plus petit nombre possible δ qui vérifie l'inégalité

$$\frac{|A-a|}{A} \leqslant \delta.$$

Etant donné qu'au point de vue pratique $A \approx a$, on prend en qualité d'erreur relative limite le nombre $\delta = \frac{\Delta}{a}$ exprimé d'habitude en %.

L'inégalité ci-dessous est vérifiée

$$a(1 - \delta) \leqslant A \leqslant a(1 + \delta).$$

On dit que le nombre approché positif a mis sous forme décimale possède n *chiffres exacts* si l'erreur absolue de ce nombre n'est pas supérieure d'une demi-unité au chiffre se trouvant au n-ième rang.

Si $n > 1$, on peut prendre en qualité d'erreur relative limite du nombre approché a, dont le premier chiffre significatif est k, le nombre

$$\delta = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Si l'on sait que $\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, le nombre a possède n chiffres exacts.

L'erreur absolue limite d'une somme algébrique de plusieurs nombres est égale à la somme des erreurs absolues limites des termes de cette somme.

L'erreur relative d'une somme de termes positifs n'est pas supérieure à la plus grande des erreurs relatives de ces termes.

L'erreur relative limite d'un produit ou d'un quotient de nombres approchés est égale à la somme des erreurs relatives limites de ces nombres.

L'erreur relative limite de la puissance d'un nombre approché est égale au produit de l'erreur relative limite de ce nombre par son exposant.

461. La valeur d'un angle fixée à l'aide d'un théodolite est de $22° 20'30'' \pm 30''$. Quelle est l'erreur relative de mesure?

Solution. L'erreur absolue $\Delta = 30''$. Alors l'erreur relative sera

$$\delta = \frac{\Delta}{a} = \frac{30''}{22°20'30''} \cdot 100\% = 0{,}04\%.$$

462. Déterminer le nombre de chiffres exacts et écrire la valeur approchée de l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}806 \ldots$ si l'erreur relative est de 0,5 %.

Solution. Etant donné que le premier chiffre significatif (9) est connu, on utilise l'inégalité $\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ et l'on obtient $0{,}005 \leqslant \frac{1}{2\cdot 10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, c'est-à-dire $n = 2$. Alors $g = 9{,}8$.

463. Trouver le nombre de chiffres exacts du nombre $\sqrt{19}$ si l'on sait que son erreur relative limite est de 0,1 %.

Solution. Dans notre cas, le premier chiffre significatif du nombre en question est 4, l'erreur relative limite étant $\delta = 0{,}001 = 10^{-3}$. En vertu de l'inégalité $\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, on a $0{,}001 \leqslant \frac{1}{2\cdot 5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, d'où $n = 3$.

Par suite, $\sqrt{19} = 4{,}36$ (les tables à quatre décimales donnent $\sqrt{19} = 4{,}3589$).

464. Trouver le nombre de chiffres exacts du nombre $A = 3{,}7563$ si l'erreur relative est de 1 %.

Solution. Le premier chiffre exact est 3, donc $0{,}01 \leqslant \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, d'où $n = 2$. Le nombre A doit s'écrire $A = 3{,}8$.

465. L'aire d'un carré est de 25,16 cm² (à 0,01 cm² près). Trouver l'erreur relative et le nombre de chiffres exacts avec lesquels on peut déterminer le côté de ce carré.

Solution. Le côté cherché s'écrit $x = \sqrt{25{,}16}$. L'erreur relative de la valeur de ce côté sera déterminée de la relation $\delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}01}{25{,}16}$, où 0,01 est l'erreur absolue de l'aire du carré. Donc, $\delta = 0{,}0002$. Le premier chiffre significatif du nombre qui donne la valeur du côté cherché est 5. De l'inégalité $\delta \leqslant \frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

on a $(5+1)\cdot 0{,}0002 \leqslant \frac{1}{10^{n-1}}$, ou $1{,}2\cdot 10^{-3} \leqslant \frac{1}{10^{n-1}}$. D'où l'on trouve $n = 3$.

466. Trouver le nombre de chiffres exacts avec lequel on peut déterminer le rayon d'un cercle si l'on sait que son aire est égale à 124,35 cm² (à 0,01 cm² près).

Réponse. 4.

467. Trouver l'erreur relative limite commise lors du calcul de la surface totale d'un cône tronqué dont les rayons des bases sont $R = 23{,}64$ cm $\pm$ 0,01 cm et $r = 17{,}31$ cm $\pm$ 0,01 cm et la génératrice $l = 10{,}21$ cm $\pm$ 0,01 cm ($\pi = 3{,}14$).

Réponse. $\delta = 0{,}16$ %.

468. La valeur approchée de l'accélération de la pesanteur à la latitude de 45° à cinq chiffres exacts est $g = 9{,}8066$. Trouver l'erreur relative de cette valeur.

Réponse. $\delta = 0{,}0005$ %.

469. Calculer l'aire d'un rectangle dont les côtés sont égaux à 92,73 m $\pm$ 0,01 m et 94,5 m $\pm$ 0,01 m.

Déterminer l'erreur relative du résultat obtenu et le nombre de chiffres exacts.

Réponse. $\delta = 0{,}022$ %, $n = 4$, $S = 8765$ m² $\pm$ 0,1 m².

§ 2. Fonction d'une variable indépendante

Les nombres *réels* peuvent être rationnels ou irrationnels.

On appelle *valeur absolue* d'un nombre réel a un nombre non négatif $|a|$ défini de la façon suivante: $|a| = a$ si $a \geqslant 0$, et $|a| = -a$ si $a < 0$.

Une variable y est appelée *fonction* uniforme (univoque) d'une variable x si à chaque valeur de la variable x appartenant à l'ensemble des nombres réels X, il correspond une valeur réele de la variable y.

Dans ce cas, la variable x est appelée *variable indépendante* (*argument*), l'ensemble X étant le *domaine de définition* de la fonction y.

L'écriture $y = f(x)$ veut dire que y est fonction de x. La valeur que prend la fonction $f(x)$ pour $x = a$ est notée $f(a)$.

Les cas les plus simples de domaines de définition sont: l'*intervalle ouvert* ou tout court l'*intervalle* (a, b), c'est-à-dire l'ensemble de valeurs de x vérifiant la condition $a < x < b$: le *segment* (*intervalle fermé*) $[a, b]$, c'est-à-dire l'ensemble de valeurs de x satisfaisant à la condition $a \leqslant x \leqslant b$: l'*intervalle semi-ouvert* à gauche $(a, b]$ (c'est-à-dire $a < x \leqslant b$) ou à droite $[a, b)$ (c'est-à-dire $a \leqslant x < b$); l'*intervalle infini* $(a, +\infty)$ (c'est-à-dire $a < x < +\infty$) ou $(-\infty, b)$ (c'est-à-dire $-\infty < x < b$) ou $(-\infty, +\infty)$ (c'est-à-dire $-\infty < x < +\infty$); l'ensemble de plusieurs intervalles ou segments, etc.

On appelle *courbe représentative* d'une fonction $y = f(x)$ le lieu géométrique des points du plan xOy dont les coordonnées vérifient l'équation $y = f(x)$.

Une fonction $f(x)$ est dite *paire* si

$$f(-x) = f(x)$$

pour n'importe quelle valeur de x. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Une fonction $f(x)$ est dite *impaire* si

$$f(-x) = -f(x)$$

pour tout x. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.

Une fonction $f(x)$ est *périodique* s'il existe un nombre positif T appelé *période* de la fonction tel que pour tout x l'égalité ci-dessous soit satisfaite:

$$f(x+T)=f(x).$$

On appelle *plus petite période* d'une fonction le nombre positif minimum τ pour lequel $f(x+\tau)=f(x)$ pour n'importe quel x. Il faut avoir en vue que $f(x+k\tau)=f(x)$, où k est un entier quelconque.

470. Trouver $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ si $f(x)=x^2$.

Solution. On obtient les valeurs que prend cette fonction pour $x=a$ et $x=b$: $f(a)=a^2$, $f(b)=b^2$. On a alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=a+b.$$

471. Discuter la parité des fonctions ci-après: a) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2\sin x$; b) $y=2^x+2^{-x}$; c) $y=|x|-5e^{x^2}$; d) $y=x^2+5x$.

Solution. a) Vu que $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2\sin x$ on a $f(-x)=(-x)^2\sqrt[3]{-x}+2\sin(-x)=-x^2\sqrt[3]{x}-2\sin x$, c'est-à-dire $f(-x)=-f(x)$. Donc, la fonction est impaire.

b) On a $f(x)=2^x+2^{-x}$, $f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x$, c'est-à-dire $f(-x)=f(x)$. Donc, la fonction est paire.

c) Ici, $f(x)=|x|-5e^{x^2}$, $f(-x)=|-x|-5e^{(-x)^2}=|x|-5e^{x^2}$, c'est-à-dire $f(-x)=f(x)$. Donc, la fonction est paire.

d) Ici, $f(x)=x^2+5x$, $f(-x)=x^2-5x$. On voit ainsi que la fonction n'est ni paire ni impaire.

472. Trouver le domaine de définition de la fonction $y=\frac{x-2}{2x-1}$.

Solution. La fonction $f(x)=\frac{x-2}{2x-1}$ est définie si $2x-1\neq 0$, c'est-à-dire si $x\neq\frac{1}{2}$. De cette façon, le domaine de définition de la fonction est constitué par deux intervalles: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

473. Trouver le domaine de définition da la fonction $y=\frac{\ln(1+x)}{x-1}$.

Solution. La fonction est déterminée si $x-1\neq 0$ et $1+x>0$, c'est-à-dire si $x\neq 1$ et $x>-1$. Le domaine de définition de la fonction est constitué par deux intervalles: $(-1, 1)$ et $(1, +\infty)$.

474. Trouver le domaine de définition de la fonction $y=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$.

Solution. Le premier terme $\sqrt{1-2x}$ prend des valeurs réelles lorsque $1-2x\geqslant 0$, tandis que le second en prend pour

$-1 \leqslant \frac{3x-1}{2} \leqslant 1$. On voit ainsi que pour trouver le domaine de définition de la fonction donnée, il faut résoudre le système d'inégalités $1-2x \geqslant 0, \frac{3x-1}{2} \leqslant 1, \frac{3x-1}{2} \geqslant -1$. On obtient $x \leqslant \frac{1}{2}$, $x \leqslant 1$, $x \geqslant -\frac{1}{3}$. Par suite, le domaine de définition est représenté par le segment $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

475. Trouver le domaine de définition de la fonction

$$y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x}.$$

Réponse. $[-2, 0)$ et $(0, 2]$.

476. Trouver le domaine de définition de la fonction

$$y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right).$$

Réponse. $[0, 4]$.

477. Trouver le domaine de définition de la fonction

$$y = \lg(3x-1) + 2\lg(x+1).$$

Réponse. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

478. Trouver le domaine de définition de la fonction $y = \frac{1}{xe^x}$.

Réponse. $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$.

479. Trouver le domaine de définition de la fonction

$$y = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}.$$

Réponse. $[0, 2)$.

480. Trouver le domaine de définition de la fonction

$$y = \frac{x-2}{\cos 2x}.$$

Réponse. Tout axe numérique, excepté les points $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, où n est un entier quelconque.

481. Trouver le domaine de définition de la fonction

$$y = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}.$$

Réponse. L'ensemble de deux intervalles : $(-\infty, -2)$ et $(2, +\infty)$.

482. Trouver la plus petite période des fonctions : a) $\sin 2x$; b) $\cos\frac{x}{2}$; c) $\operatorname{tg} 3x$.

Réponse. a) $T = \pi$; b) $T = 4\pi$; c) $T = \frac{\pi}{3}$.

§ 3. Construction des courbes représentatives des fonctions

Les courbes représentatives des fonctions peuvent être construites de plusieurs façons:

a) d'après plusieurs points de la courbe;

b) en effectuant différentes opérations sur les courbes représentatives (addition, soustraction, multiplication);

c) en transformant les courbes représentatives (translation, dilatation).

En partant de la courbe représentative d'une fonction $y = f(x)$, on peut construire les courbes représentatives des fonctions suivantes:

1) $y = f(x - a)$: la courbe initiale est translatée suivant l'axe Ox de la grandeur a;

2) $y = f(x) + b$: la même courbe mais translatée suivant l'axe Oy de la grandeur b;

3) $y = A \cdot f(x)$: la courbe initiale dilatée dans le rapport $\frac{A}{1}$ suivant l'axe Oy;

4) $y = f(kx)$: la même courbe mais dilatée dans le rapport $\frac{1}{k}$ suivant l'axe Ox.

On voit ainsi, que la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ donne la possibilité de construire la courbe représentative d'une fonction du type $y = Af[k(x - a)] + b$.

483. Construire la courbe représentative de la fonction $y = 2x + 1 + \cos x$.

Solution. La courbe représentative de la fonction donnée peut s'obtenir en additionnant les courbes représentatives des deux

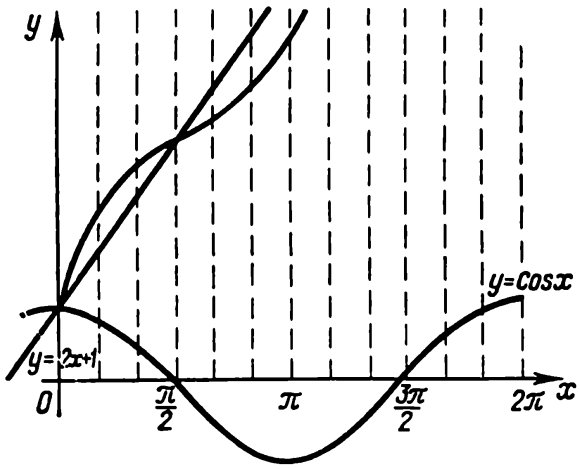


Fig. 22

fonctions: $y = 2x + 1$ et $y = \cos x$. La courbe représentative de la première de ces fonctions est une droite qui peut être construite à l'aide d'un couple de ses points: la courbe représentative de la deuxième fonction est une cosinusoïde (fig. 22).

484. Construire la courbe représentative de la fonction

$$y = \begin{cases} 2 - x \text{ pour } x < 3 \\ 0{,}1x^2 \text{ pour } x \geqslant 3. \end{cases}$$

S o l u t i o n. Pour $x < 3$, c'est une demi-droite; pour $x \geqslant 3$, on obtient la branche d'une parabole (fig. 23).

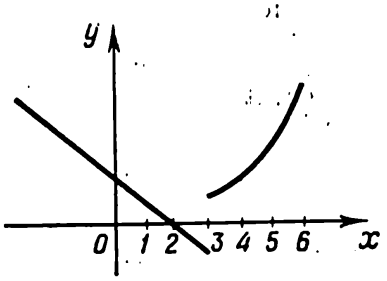


Fig. 23

485. Construire la courbe représentative de la fonction $y = 2 \sin (2x - 1)$ ou $y = 2 \sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

S o l u t i o n. Ici, $A = 2$, $k = 2$, $a = \frac{1}{2}$. La courbe initiale est $y = \sin x$. On construit ensuite la courbe représentative de la fonction $y = \sin 2x$ en comprimant à moitié la courbe initiale suivant

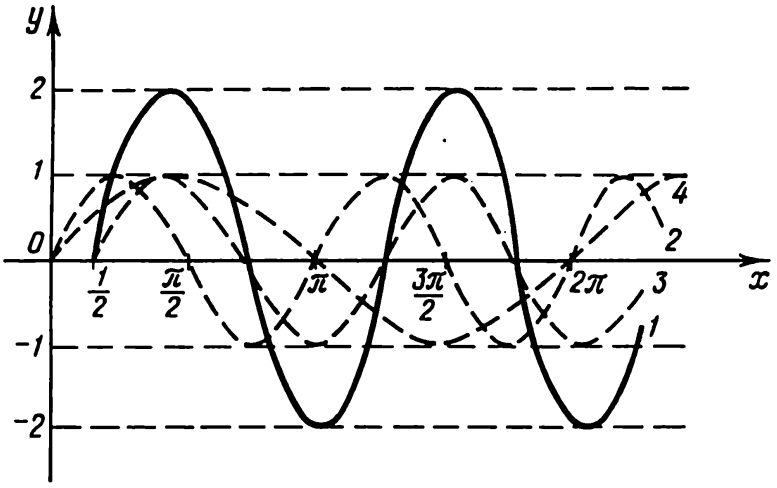


Fig. 24

l'axe des abscisses. Ensuite, on construit la courbe représentative de la fonction $y = \sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ en translatant à droite la courbe de la grandeur $\frac{1}{2}$. Finalement, on obtient la courbe représentative cherchée de la fonction $y = 2 \sin (2x - 1)$ en dilatant dans le rapport $\frac{2}{1}$ la courbe (3) suivant l'axe des ordonnées (fig. 24).

Construire les courbes représentatives des fonctions ci-après:

486. $y=\frac{x^3-x}{3}$ sur le segment $[-4, 4]$.

487. $y=x^2(2-x)^2$ sur le segment $[-3, 3]$.

488. $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$ dans le domaine de définition.

489. $y=\frac{1}{2}x+2^{-x}$ sur le segment $[0, 5]$.

490. $y=\frac{x^2+1}{x}$.

491. $y=\arcsin x$ sur le segment $[-1, 1]$.

492. $y=\arccos x$ sur le segment $[-1, 1]$.

493. $y=\sin(3x-2)+1$.

494. $y=-2\cos(2x+1)$.

495. $y=\arcsin(x-2)$.

496. $y=2(x-1)^3$ en partant de la fonction $y=x^3$.

497. $y=x+1+\sin(x-1)$.

§ 4. Limites

Le nombre a est appelé *limite d'une suite* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, si, pour tout nombre positif ε pris aussi petit que l'on veut, on trouve un nombre positif N tel que $|x_n-a|<\varepsilon$ si $n>N$.

On écrit dans ce cas: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Le nombre A est appelé *limite d'une fonction* $f(x)$ lorsque $x\to a$ si pour tout $\varepsilon>0$ pris aussi petit que l'on veut on trouve un nombre $\delta>0$ tel que $|f(x)-A|<\varepsilon$ si $|x-a|<\delta$. On écrit dans ce cas: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

D'une façon analogue, on a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ si $|f(x)-A|<\varepsilon$ pour $|x|>N$.

On écrit par convention $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ si $|f(x)|>M$ pour $|x-a|<\delta$, où M est un entier arbitraire.

Dans ce cas, la fonction $f(x)$ est un *infiniment grand* lorsque $x\to a$.

Si $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, la fonction $\alpha(x)$ est un *infiniment petit* lorsque $x\to a$.

Si $x<a$, et que $x\to a$, on écrit par convention $x\to a-0$: si $x>a$ et que $x\to a$, on écrit $x\to a+0$.

Le nombre $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ est appelé *limite à gauche* de la fonction $f(x)$ au point a. Le nombre $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ est appelé *limite à droite* de la fonction $f(x)$ au point a.

Pour que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, il faut et il suffit que $f(a-0)=f(a+0)$.

Au point de vue pratique, le calcul des limites est basé sur les théorèmes suivants.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ (lorsque $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$).

On utilise aussi les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (*première limite remarquable*): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2{,}71828\ldots$ (*deuxième limite remarquable*).

Le logarithme d'un nombre x dans un système de base e est appelé *logarithme naturel* et se note $\ln x$.

Pour résoudre les exercices, il est utile d'avoir en vue les égalités suivantes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

498. Montrer que pour $n\to\infty$ la limite de la suite $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},\ \ldots,\ 2+\frac{1}{n},\ \ldots$ est égale à 2.

S o l u t i o n. Le n-ième terme de cette suite est $x_n=2+1/n$. Par suite, $x_n-2=1/n$. Donnons-nous un nombre positif ε. Choisissons n tellement grand que l'inégalité $1/n<\varepsilon$ soit satisfaite. Pour cela, il suffit de prendre $n>1/\varepsilon$. En choisissant n de cette façon, on aura $|x_n-2|<\varepsilon$. Donc, $\lim x_n=2$.

499. Montrer que si $n\to\infty$ la limite de la suite $7/3,\ 10/5,\ 13/7,\ \ldots,\ (3n+4)/(2n+1),\ \ldots$ est égale à $3/2$.

S o l u t i o n. Ici, $x_n-3/2=(3n+4)/(2n+1)-3/2=$ $=5/[2(2n+1)]$. Déterminons la valeur de n pour laquelle l'inégalité $5/[2(2n+1)]<\varepsilon$ est vérifiée; étant donné que $2(2n+1)>$ $>5/\varepsilon$, on a $n>5/4\varepsilon-1/2$.

Donc, si $n>5/4\varepsilon-1/2$, alors $|x_n-3/2|<\varepsilon$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty}x=3/2$. En posant $\varepsilon=0{,}1$, on arrive à la conclusion que l'inégalité $|x_n-3/2|<0{,}1$ est satisfaite pour $n>12$ (par exemple, pour $n=13$).

L'inégalité $|x_n-3/2|<0{,}01$ est satisfaite pour $n>124{,}5$ (par exemple, pour $n=125$).

L'inégalité $|x_n-3/2|<0{,}001$ est satisfaite pour $n>1249{,}5$ (par exemple, pour $n=1250$).

500. Trouver $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$.

S o l u t i o n. Etant donné que $x \to 4$, le numérateur de la fraction tend vers le nombre $5 \cdot 4 + 2 = 22$, alors que le dénominateur tend vers $2 \cdot 4 + 3 = 11$.

Par suite, $\lim\limits_{x \to 4} \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{22}{11} = 2$.

501. Trouver $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+5}{2x+7}$.

S o l u t i o n. Pour $x \to \infty$, le numérateur et le dénominateur de la fraction deviennent infinis. On dit dans ce cas que l'on a une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$.

En divisant par x le numérateur et le dénominateur de la fraction, on obtient $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+5}{2x+7} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3+5/x}{2+7/x} = \frac{3}{2}$, car, pour $x \to \infty$, chacune des fractions $\frac{5}{x}$ et $\frac{7}{x}$ tend vers zéro.

502. Trouver $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

S o l u t i o n. On voit que pour $x \to 3$, le numérateur et le dénominateur de la fraction tendent vers zéro $\left(\text{on dit que l'indétermination ainsi obtenue est du type } \frac{0}{0}\right)$. On a $\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$; si $x \neq 3$, alors $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x+3}{x}$.

Mais pour $x \to 3$, la fraction $\frac{x+3}{3}$ tend vers $\frac{3+3}{3} = 2$.

Donc, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = 2$.

503. Trouver $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{0}{0}\right)$.

S o l u t i o n. Décomposons en facteurs le numérateur et le dénominateur de la fraction :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

504. Trouver $\lim\limits_{x \to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{0}{0}\right)$.

S o l u t i o n. On a

$$\lim_{x \to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x} = \lim_{x \to 10} \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2} =$$
$$= \lim_{x \to 10} \frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}.$$

Le numérateur de la fraction tend vers 300, tandis que le dénominateur tend vers zéro (il est donc un infiniment petit). Par suite, la fraction considérée est un infiniment grand

$$\lim_{x\to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-2x^2+100x} = \infty.$$

505. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{0}{0}\right)$.

Solution. Multiplions le numérateur et le dénominateur de la fraction par la somme $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

506. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{0}{0}\right)$.

Solution. Posons $1+x=y^5$. Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^5-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1} = \frac{3}{5}.$$

507. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{x}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{0}{0}\right)$.

Solution. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{m\cdot \sin mx}{mx} = m\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{mx} = m.$$

508. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{0}{0}\right)$.

Solution. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{5x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{x}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

On a utilisé le résultat de l'exemple précédent en posant $m=\frac{5}{2}$.

509. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Solution. Divisons le numérateur et le dénominateur de la fraction par x à la puissance la plus élevée (x^3):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{4}.$$

510. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

S o l u t i o n. Divisons le numérateur et le dénominateur de la fraction par x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^3}}}=\frac{3}{1}=3.$$

511. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$ (indétermination du type $\infty-\infty$).

S o l u t i o n. Multiplions et divisons l'expression considérée par $\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^3+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2.$$

512. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

S o l u t i o n. Extrayons les entiers en divisant le numérateur par le dénominateur de la fraction:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$$

De cette façon, on obtient:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}};$$

vu que

$$\frac{8x-3}{x^2-3x+7} \to 0 \quad \text{pour} \quad x \to \infty,$$

on a

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} = e.$$

Prenant en considération le fait que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=8$, on obtient $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = e^8$.

513. Trouver les limites à gauche et à droite de la fonction

$$f(x)=\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$$

pour $x \to 3$.

Solution. Si $x \to 3-0$, alors $\dfrac{1}{x-3} \to -\infty$ et $2^{\frac{1}{x-3}} \to 0$. Par suite, $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\dfrac{1}{3}$. Si $x \to 3+0$, alors $\dfrac{1}{x-3} \to +\infty$, $2^{\frac{1}{x-3}} \to +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=0$.

514. Trouver les limites à gauche et à droite de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}}$ lorsque $x \to a$.

Solution. Si $x \to a-0$, alors $\dfrac{1}{x-a} \to -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a-0} e^{\frac{1}{x-a}}=0$. Si $x \to a+0$, alors $\dfrac{1}{x-a} \to +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a+0} e^{\frac{1}{x-a}}=\infty$.

515. Trouver $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Réponse. $\dfrac{1}{2}$.

516. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

Réponse. -1.

517. Trouver $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

Réponse. $\frac{1}{6}$.

518. Trouver $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Réponse. -2.

519. Trouver $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$.

Réponse. $-\sin a$.

520. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$.

Réponse. $\frac{m}{n}$.

521. Trouver $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x_0}{x-x_0}$.

Réponse. $\sec^2 x_0$.

522. Trouver $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$.

Réponse. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

523. Trouver $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi-2x}$.

Indication. Poser $\frac{\pi}{2}-x=\alpha$.

Réponse. $\frac{1}{2}$.

524. Trouver $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$.

Réponse. ∞.

525. Trouver $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$.

Réponse. 2.

526. Montrer que pour $n\to\infty$, la suite $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \ldots$ $\ldots, \frac{4n-3}{n+1}, \ldots$ admet une limite égale à 4.

527. Montrer que pour $n\to\infty$, la suite $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$ $\ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$ est un infiniment petit.

528. Trouver $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$.

Réponse. $\dfrac{3}{4}$.

529. Trouver $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

Réponse. $-\dfrac{1}{4}$.

530. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

Réponse. $\dfrac{1}{2}$.

531. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

Réponse. 3.

532. Trouver $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

Réponse. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

533. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$.

Réponse. $\dfrac{25}{9}$.

534. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Réponse. $\dfrac{1}{2}$.

535. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+mx)}{x}$.

Réponse. m.

536. Trouver $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2^x+3}{2^x-3}$.

Réponse. 1 si $x\to+\infty$; -1 si $x\to-\infty$.

537. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)$.

Réponse. $\dfrac{a-c}{2}$.

538. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

Réponse. 0.

539. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

Réponse. 0.

540. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-5^x}{1-e^x}$.

Réponse. $\ln 5$.

541. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$.

Réponse. $\frac{\ln(8/7)}{\ln(6/5)}$.

542. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$.

Réponse. 2

543. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}$.

Réponse. $\ln 5$.

544. Trouver $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.

Indication. Poser $x=t^4$.

Réponse. $\frac{1}{4}$.

545. Trouver $\lim\limits_{x\to \pm 0}\frac{\sin x}{|x|}$.

Réponse. 1 si $x\to +0$; -1 si $x\to -0$.

546. Trouver $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t+\sin t}{t-\sin t}$.

Réponse. $+\infty$.

547. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\ln(x+1)}$.

Réponse. 2.

548. Trouver $\lim\limits_{x\to 5-0} 10^{\frac{1}{x-5}}$.

Réponse. 0.

549. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

Réponse. Il n'y a pas de limite.

550. Trouver $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^4-1}$.

Réponse. $\frac{5}{4}$.

551. Trouver $\lim\limits_{t\to\infty} t\,[\sqrt[t]{a}-1]$ $(t>0)$.

Indication. Poser $x=\frac{1}{t}$, où $x\to 0$.

Réponse. $\ln a$.

552. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

Réponse. e.

553. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

Réponse. e^3.

554. Trouver $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

Indication. Réduire au même dénominateur les fractions entre parenthèses.

Réponse. $\frac{1}{6}$.

555. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-4^x}{x^2+x}$.

Réponse. $\ln\frac{5}{4}$.

556. Trouver $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$.

Indication. Avoir en vue que $x^x=e^{x\ln x}$.

Réponse. 1.

557. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$.

Réponse. -3.

558. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$.

Réponse. 0.

559. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$.

Réponse. $\frac{1}{2}$.

560. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x$.

Indication. Diviser par x le numérateur et le dénominateur de la fonction homographique.

Réponse. e^{10}.

561. Trouver $\lim\limits_{\alpha\to 0}(2-\cos\alpha)^{\operatorname{cosec}^2\alpha}$.

Réponse. $\sqrt{e}$.

562. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$.

Réponse. e^{a-b}.

563. Trouver $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Réponse. $\sqrt{e}$.

§ 5. Comparaison des infiniment petits

Soient $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ des infiniment petits lorsque $x \to a$.

1. Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, on dit que α est un *infiniment petit d'ordre supérieur* par rapport à β. Dans ce cas, on écrit $\alpha = o(\beta)$.

2. Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = m$, où m est différent de zéro, on dit que α et β sont des *infiniment petits de même ordre*. En particulier, si $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, les infiniment petits α et β sont dits *équivalents*. La notation $\alpha \sim \beta$ veut dire que α et β sont des infiniment petits équivalents.

Si $\frac{\alpha}{\beta} \to \infty$, cela signifie que $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$. Donc, β est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α et l'on écrit $\beta = o(\alpha)$.

3. Si α^k et β sont des infiniment petits de même ordre et que $k > 0$, on dit que l'infiniment petit β *est d'ordre k* par rapport à α.

Signalons quelques propriétés des infiniment petits:

1) le produit de deux infiniment petits est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport aux facteurs du produit, c'est-à-dire si $\gamma = \alpha\beta$, alors $\gamma = o(\alpha)$ et $\gamma = o(\beta)$;

2) deux infiniment petits α et β sont équivalents si, et seulement si, leur différence $\alpha - \beta = \gamma$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α et β, c'est-à-dire si $\gamma = o(\alpha)$, $\gamma = o(\beta)$;

3) si $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = m$, $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = m$, c'est-à-dire si le rapport de deux infiniment petits admet une limite, cette limite reste invariable lorsqu'on remplace chacun de ces infiniment petits par son équivalent.

Il est utile de se rappeler que, si $x \to 0$, les infiniment petits ci-dessous sont équivalents:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \ln(1 + x) \sim x.$$

564. Soit t un infiniment petit. Comparer les infiniment petits $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ et $\beta = 3t^2 + 2t^3$.

Solution. On trouve

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t \to 0} \frac{5t^2 + 2t^5}{3t^2 + 2t^3} = \lim_{t \to 0} \frac{5 + 2t^3}{3 + 2t} = \frac{5}{3}.$$

La limite trouvée est différente de zéro, ce qui signifie que α et β sont des infiniment petits de même ordre.

565. Comparer les infiniment petits $\alpha = t \cdot \sin^2 t$ et $\beta = 2t \cdot \sin t$ $(t \to 0)$.

Solution. On trouve

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot \sin^2 t}{2t \cdot \sin t} = \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \sin t = 0,$$

c'est-à-dire $\alpha = o(\beta)$.

566. Comparer les infiniment petits $\alpha = t \ln(1 + t)$ et $\beta = t \sin t$ $(t \to 0)$.

Solution. On a

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{t\to 0}\frac{t\ln(1+t)}{t\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\sin t}=1,$$

c'est-à-dire $\alpha\sim\beta$.

567. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$.

Solution. Remplaçons le numérateur et le dénominateur de la fraction par les infiniment petits équivalents

$$\ln(1+3x\sin x)\sim 3x\sin x,\ \operatorname{tg}(x^2)\sim x^2$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3.$$

568. Déterminer l'ordre de l'infiniment petit $y=xe^x$ par rapport à l'infiniment petit x.

Réponse. $y\sim x$.

569. Déterminer l'ordre de l'infiniment petit $y=\sqrt{1+x\sin x}-1$ par rapport à l'infiniment petit x.

Réponse. 2.

570. Déterminer l'ordre de l'infiniment petit $y=\sqrt{\sin 2x}$ par rapport à l'infiniment petit x.

Réponse. $\frac{1}{2}$.

571. Comparer les infiniment petits $\alpha=t^2\sin^2 t$ et $\beta=t\operatorname{tg} t$ si $t\to 0$.

Réponse. $\alpha=o(\beta)$.

572. Comparer les infiniment petits $\alpha=(1+x)^m-1$ et $\beta=mx$ si $x\to 0$ et que m est un nombre rationnel positif.

Réponse. $\alpha\sim\beta$.

573. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{tg}3x}$.

Indication. Remplacer le numérateur et le dénominateur par des infiniment petits équivalents.

Réponse. $\frac{1}{3}$.

574. Comparer les infiniment petits $\alpha=a^x-1$ et $\beta=x\ln a$.

Réponse. $\alpha\sim\beta$.

575. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$.

Réponse. 9/4.

576. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$.

Réponse. $-\frac{1}{2}$.

577. Trouver $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$.

Réponse. $-\dfrac{1}{2}$.

578. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

Indication. Mettre l'expression $\cos x$ figurant sous le signe du logarithme sous la forme $1-(1-\cos x)$.

Réponse. $-\dfrac{1}{2}$.

579. Trouver $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

Réponse. 1.

580. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$.

Réponse. 9/25.

581. Trouver $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(5^\alpha-1)(4^\alpha-1)}{(3^\alpha-1)(6^\alpha-1)}$.

Réponse. $\dfrac{\ln 5\cdot\ln 4}{\ln 3\cdot\ln 6}$.

582. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}$.

Indication. Diviser par 2 le numérateur et le dénominateur.

Réponse. 1,6.

§ 6. Continuité d'une fonction

Une fonction $f(x)$ est dite *continue en un point* a si : 1) elle est définie dans un certain voisinage du point a ; 2) la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe ; 3) cette limite est égale à la valeur que prend la fonction au point a, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si l'on note $x-a=\Delta x$ (accroissement de la variable) et $f(x)-f(a)=\Delta y$ (accroissement de la fonction), la condition de continuité de la fonction peut s'écrire comme suit : $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, ce qui signifie que la fonction $f(x)$ est continue au point a si, et seulement si, à un accroissement infiniment petit de la variable en ce point il correspond un accroissement infiniment petit de la fonction.

Une fonction continue en chaque point d'un domaine (intervalle, segment, etc.) est dite *continue dans ce domaine*.

Un point a appartenant au domaine de définition de la fonction, ou étant un point frontière de ce domaine, est appelé *point de discontinuité* si en ce point la condition de continuité de la fonction n'est pas vérifiée.

Si les limites finies ci-dessous existent

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0),$$

et que les nombres $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ ne sont pas tous égaux, le point a est un *point de discontinuité de première espèce.*

En particulier, si la limite à gauche et la limite à droite de la fonction au point a sont égales $f(a-0) = f(a+0)$, mais ne sont pas égales à $f(a)$, le point a est un *point de discontinuité éliminable.*

Les points de discontinuité qui ne sont pas des points de discontinuité de première espèce sont appelés *points de discontinuité de deuxième espèce.* Aux points de discontinuité de deuxième espèce il n'y a pas de limites unilatérales (à gauche ou à droite).

La somme et le produit des fonctions continues sont aussi une fonction continue.

Le quotient obtenu à la suite de la division d'une fonction continue par une autre fonction continue est une fonction continue en tous les points où le diviseur n'est pas nul.

583. Montrer que si $x = 4$, la fonction $y = \frac{x}{x-4}$ présente une discontinuité.

Solution. On trouve

$$\lim_{x\to 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty.$$

On voit ainsi que si $x \to 4$, la fonction n'a pas de limite finie ni à gauche ni à droite. Il s'ensuit que le point $x = 4$ est un point de discontinuité de deuxième espèce (fig. 25).

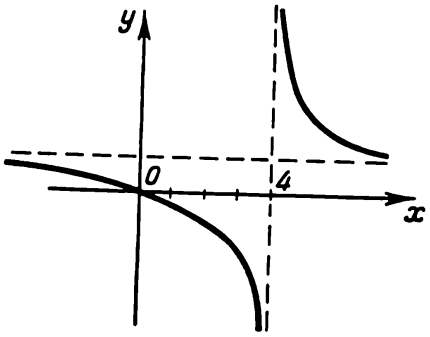


Fig. 25

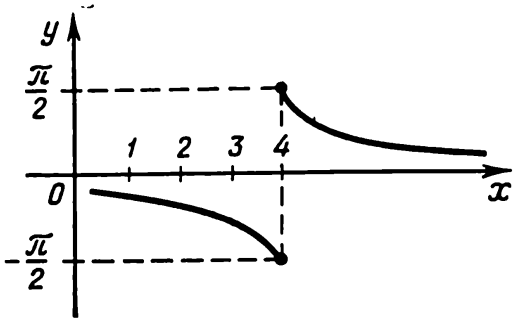


Fig. 26

584. Montrer que le point $x = 4$ est un point de discontinuité pour la fonction $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}$.

Solution.

Si $x \to 4-0$, alors $\frac{1}{x-4} \to -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4-0} y = -\frac{\pi}{2}$.

Si $x \to 4+0$, alors $\frac{1}{x-4} \to +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4+0} y = \frac{\pi}{2}$,

Donc, lorsque $x \to 4$, les limites à gauche et à droite de la fonction ont des valeurs finies distinctes. On peut donc dire que le point $x = 4$ est un point de discontinuité de première espèce.

La différence des limites à droite et à gauche en un point de

discontinuité de première espèce est appelée *saut*. Dans notre cas, le saut est égal à $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ (fig. 26).

585. Montrer que si $x = 5$, la fonction $y = \frac{x^2-25}{x-5}$ présente une discontinuité.

Solution. Au point $x = 5$ la fonction n'est pas définie, car la substitution fait apparaître une indétermination du type $\frac{0}{0}$. Aux autres points, la fraction peut être simplifiée par $x - 5$ étant donné $x - 5 \neq 0$. Donc, pour $x \neq 5$, on a $y = x + 5$. On voit sans difficulté que

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 5+0} y = 10.$$

Par suite, pour $x = 5$, la fonction présente une discontinuité éliminable. Cette discontinuité est éliminée si l'on convient que, pour $x = 5$, $y = 10$.

De cette façon, on peut considérer que la fonction $y = \frac{x^2-25}{x-5}$ est continue pour toutes les valeurs de x si l'on considère que l'égalité $\frac{x^2-25}{x-5} = x + 5$ est valable pour toutes les valeurs de x, et même pour $x = 5$. Dans ce cas, la courbe représentative de la fonction sera la droite $y = x + 5$.

586. Trouver les points de discontinuité de la fonction $y = \frac{2^{1/(x-2)}-1}{2^{1/(x-2)}+1}$.

Réponse. $x = 2$ (point de discontinuité de première espèce).

587. Trouver les points de discontinuité de la fonction $y = \frac{1}{(x-1)(x-5)}$.

Réponse. $x = 1$, $x = 5$ (points de discontinuité de la deuxième espèce).

588. Quel est le caractère de la discontinuité que la fonction $y = \frac{1}{1-e^{1-x}}$ présente au point $x = 1$?

Réponse. C'est un point de discontinuité de deuxième espèce.

589. Quel est le caractère de la discontinuité que la fonction $y = \frac{\sin x}{x}$ présente au point $x = 0$?

Réponse. $x = 0$ est un point de discontinuité éliminable.

590. Trouver les points de discontinuité de la fonction

$$y = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}.$$

Réponse. $x = 3$ (point de discontinuité de première espèce); $x = 5$ (point de discontinuité de deuxième espèce); $x = 0$ (point de discontinuité éliminable); $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) (points de discontinuité de deuxième espèce).

591. Trouver les points de discontinuité de la fonction

$$y = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

Réponse. $x = 1$, $x = 2$ (points de discontinuité éliminables).

592. Trouver les points de discontinuité de la fonction

$$y = \frac{x+1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}.$$

Réponse. $x = -2$, $x = -3$ (points de discontinuité de deuxième espèce), $x = -1$ (point de discontinuité éliminable).

593. Trouver les points de discontinuité de la fonction

$$y = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Réponse. La fonction est continue dans l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$.

594. Discuter la continuité de la fonction

$$y = \frac{1}{(x-1)(x-6)}$$

dans les segments: a) $[2, 5]$; b) $[4, 10]$; c) $[0, 7]$.

Réponse. a) la fonction est continue; b) la fonction possède un point de discontinuité de deuxième espèce; c) la fonction possède deux points de discontinuité de deuxième espèce.

595. Discuter la continuité de la fonction

$$y = \frac{1}{x^4 - 26x^2 + 25}$$

dans les segments: a) $[6, 10]$; b) $[-2, 2]$; c) $[-6, 6]$.

Réponse. a) la fonction est continue; b) la fonction possède deux points de discontinuité de deuxième espèce; c) la fonction possède quatre points de discontinuité de deuxième espèce.

CHAPITRE VI

CALCUL DIFFÉRENTIEL DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE

§ 1. Dérivées et différentielles

1. Dérivation des fonctions explicites. Soient x_1 et x_2 deux valeurs de la variable, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ les valeurs correspondantes d'une fonction $y = f(x)$.

Alors la différence $\Delta x = x_2 - x_1$ s'appelle *accroissement de la variable*, et la différence $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ est appelée *accroissement de la fonction* sur le segment $[x_1, x_2]$.

On appelle *dérivée* de la fonction $y = f(x)$ par rapport à la variable x la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable quand celui-ci tend vers zéro:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ou

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\left(\text{la dérivée est désignée aussi par } \frac{dy}{dx}\right)$.

Géométriquement, la dérivée est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ au point x:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha.$$

La dérivée n'est autre que la *vitesse de variation* de la fonction au point x. La recherche de la dérivée est appelée *dérivation* de la fonction.

Formules de dérivation des fonctions fondamentales

1) $(x^m)' = mx^{m-1}$.

2) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

4) $(e^x)' = e^x$.

5) $(a^x)' = a^x \ln a$.

6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

7) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

8) $(\sin x)' = \cos x$.

9) $(\cos x)' = -\sin x$.

10) $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$.

11) $(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

12) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

15) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

16) $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$.

17) $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x$.

18) $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

19) $(\operatorname{cth} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Principales règles de dérivation

Soient C une constante et $u = u(x)$, $v = v(x)$ des fonctions qui possèdent des dérivées.

1) $C' = 0$. 2) $x' = 1$. 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$. 4) $(Cu)' = Cu'$.

5) $(uv)' = u'v + uv'$. 6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

7) Si $y = f(u)$, $u = u(x)$, c'est-à-dire $y = f[u(x)]$, où les fonctions $f(u)$ et $u(x)$ possèdent des dérivées, alors

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

(règle de dérivation d'une *fonction composée*).

596. En s'appuyant sur la définition de la dérivée (sans avoir recours aux formules de dérivation), trouver la dérivée de la fonction $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

Solution. Donnons à x l'accroissement Δx: y prend alors un accroissement Δy:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Déterminons par soustraction Δy:

$$\Delta y = [2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) - 4] - \\ -(2x^3+5x^2-7x-4) = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + \\ + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x.$$

Trouvons le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7.$$

Trouvons la limite de ce rapport quand $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(6x^2+6x\Delta x+2\Delta x^2+10x+5\Delta x-7) = 6x^2+10x-7.$$

Ainsi, selon la définition de la dérivée

$$y' = 6x^2 + 10x - 7.$$

597. En appliquant la définition de la dérivée, trouver la dérivée de la fonction $y = \sqrt{x}$.

Solution. Trouvons l'accroissement de la fonction $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$. D'où l'on tire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \text{ et } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

De cette façon,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ainsi,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

598. En appliquant la définition de la dérivée, trouver la dérivée de la fonction $y = -\operatorname{cotg} x - x$.

Solution. On trouve

$$\Delta y = -\operatorname{cotg}(x+\Delta x) - (x+\Delta x) + \operatorname{cotg} x + x = \\ = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(x+\Delta x) - \Delta x.$$

Utilisons la formule

$$\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

D'où

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - 1$$

et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \cdot \sin(x+\Delta x)} - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Ainsi,

$$y' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \operatorname{cotg}^2 x.$$

En appliquant la définition de la dérivée, trouver les dérivées des fonctions:

599. $y = \frac{1}{x^2}$.

Réponse. $y' = -\frac{2}{x^3}$.

600. $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Réponse. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

601. $y = 5 \sin x + 3 \cos x$.

Réponse. $y' = 5 \cos x - 3 \sin x$.

602. $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$.

Réponse. $y' = 5 \operatorname{tg}^2 x$.

603. $y = \frac{1}{e^x + 1}$.

Réponse. $y' = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

604. $y = 2^{x^2}$.

Réponse. $y' = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2$.

En s'appuyant sur les formules et les règles de dérivation, trouver les dérivées des fonctions suivantes:

605. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$.

Solution. $y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7x' + 4' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0$; $y' = 6x^2 - 10x + 7$.

606. $y = x^2 \cdot e^x$.

Solution. $y' = x^2 (e^x)' + e^x \cdot (x^2)' = x^2 e^x + 2xe^x = xe^x \times \times (x + 2)$.

607. $y = x^3 \operatorname{arctg} x$.

Solution. $y' = x^3 (\operatorname{arctg} x)' + \operatorname{arctg} x \cdot (x^3)' = x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 \times \times \operatorname{arctg} x = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$.

608. $y = x\sqrt{x}(3 \ln x - 2)$.

Solution. Mettons la fonction donnée sous la forme $y = x^{3/2} \times \times (3 \ln x - 2)$. Alors

$$y' = x^{3/2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2} x^{1/2} (3 \ln x - 2) = 3x^{1/2} + \frac{9}{2} x^{1/2} \cdot \ln x - 3x^{1/2} = \\ = \frac{9}{2} \sqrt{x} \ln x.$$

609. $y = \frac{\arcsin x}{x}$.

Solution. $y' = \frac{x \cdot (\arcsin x)' - \arcsin x \cdot (x)'}{x^2} =$

$$= \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

610. $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

Solution. On a

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ = \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

611. $y = (2x^3 + 5)^4$.

Solution. Posons $2x^3 + 5 = u$, alors $y = u^4$. Selon la règle de dérivation d'une fonction composée, on a

$$y' = (u^4)'_u \cdot (2x^3 + 5)'_x = 4u^3 (6x^2) = 24x^2 (2x^3 + 5)^3.$$

612. $y = \operatorname{tg}^6 x$.

Solution. $y' = 6 \operatorname{tg}^5 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 6 \operatorname{tg}^5 x \cdot \sec^2 x$.

613. $y = \cos^2 x$.

Solution. $y' = 2 \cos x (\cos x)' = -2 \cos x \cdot \sin x = -\sin 2x$.

614. $y = \sin(2x + 3)$.

Solution. $y' = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2 \cos(2x + 3)$.

615. $y = \operatorname{tg} \ln x$.

Solution. $y' = \sec^2(\ln x)\cdot(\ln x)' = \frac{1}{x}\cdot\sec^2(\ln x)$.

616. $y = \sin^3\frac{x}{3}$.

Solution. On trouve

$$y' = 3\sin^2\frac{x}{3}\cdot\left(\sin\frac{x}{3}\right)' = 3\sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\left(\frac{x}{3}\right)' = \sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}.$$

617. $y = \ln(x^2+5)$.

Solution. $y' = \frac{1}{x^2+5}\cdot(x^2+5)' = \frac{2x}{x^2+5}$.

618. $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Solution. On a

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$$

619. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Solution. On trouve

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times$$

$$\times\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

620. $y = \ln\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$.

Solution. On a

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}}\cdot\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}}\times$$

$$\times\left(\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x+1}}+\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}}\times$$

$$\times\frac{\cos x\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right.}{\sqrt{4\sin^2 x-1}} = \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x-1}}.$$

621. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)$.

Solution. On a

$$y'=\frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\times$$

$$\times\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}\right)=\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+k}}+\frac{\sqrt{x^2+k}}{2}+$$

$$+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}}=\frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}=\sqrt{x^2+k}.$$

622. $y=\arcsin\frac{2x^2}{1+x^4}$, $|x|<1$.

Solution. On trouve

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\times$$

$$\times\frac{(1+x^4)\cdot 4x-2x^2\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-2x^4+x^8}}\cdot\frac{4x(1-x^4)}{1+x^4}=\frac{4x}{1+x^4}.$$

623. $y=\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{3}$.

Solution. On a

$$y'=\frac{1}{1+\frac{\ln^2 x}{9}}\cdot\frac{1}{3x}=\frac{3}{x(9+\ln^2 x)}.$$

624. $y=e^x\cdot\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

Solution. En mettant cette fonction sous la forme

$$y=e^x\cdot\operatorname{arctg}e^x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}),$$

on obtient

$$y'=e^x\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x+e^x\operatorname{arctg}e^x-\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^{2x}\cdot 2=$$

$$=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}+e^x\cdot\operatorname{arctg}e^x-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=e^x\cdot\operatorname{arctg}e^x.$$

625. $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$.

Solution. Transformons cette fonction

$$y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln(1+\sin x)-\ln\cos x.$$

Alors

$$y' = \frac{\cos^2 x \cos x - \sin x \cdot \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} +$$

$$+ \frac{1}{1+\sin x} \cos x - \frac{1}{\cos x} (-\sin x),$$

ou

$$y' = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x (1-\sin x)}{1-\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1-\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\cos^2 x} = 2\sec^3 x.$$

626. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} + \ln \cos \sqrt{x}$.

Solution. On a

$$y' = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \sec^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos \sqrt{x}} \cdot (-\sin \sqrt{x}) \times$$

$$\times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg} \sqrt{x} (\sec^2 \sqrt{x} - 1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}.$$

627. $y = 5 \operatorname{sh}^3 \frac{x}{15} + 3 \operatorname{sh}^5 \frac{x}{15}$.

Solution. On trouve

$$y' = 15 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{15} \cdot \frac{1}{15} + 15 \operatorname{sh}^4 \frac{x}{15} \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{15} \cdot \frac{1}{15} =$$

$$= \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{15} \cdot \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15}\right),$$

d'où en utilisant la relation $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, on obtient finalement

$$y' = \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \operatorname{ch}^3 \frac{x}{15}.$$

628. $y = x^{x^2}$.

Solution. Dans ce cas, la base et l'indice sont fonctions de x. En prenant les logarithmes des deux membres, on aura

$$\ln y = x^2 \ln x.$$

Dérivons par rapport à x les deux membres de cette dernière égalité. Vu que y est fonction de x, alors $\ln y$ est une fonction composée de x et $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$.

Donc,

$$\frac{y}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \cdot \ln x, \quad \frac{y'}{y} = x(1 + 2\ln x),$$

$$y' = xy(1 + 2\ln x) = xx^{x^2}(1 + 2\ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x).$$

629. $y=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Solution. On a $\ln y=\operatorname{tg} x\cdot\ln\sin x$,

$$\frac{y'}{y}=\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+\sec^2 x\cdot\ln\sin x=1+\sec^2 x\cdot\ln\sin x,$$

$$y'=y\,(1+\sec^2 x\cdot\ln\sin x)=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\,(1+\sec^2 x\cdot\ln\sin x).$$

630. $y=\dfrac{(2x-1)^3\cdot\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$.

Solution. Dans ce cas, il est aussi utile de prendre préalablement les logarithmes de la fonction donnée:

$$\ln y=3\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(3x+2)-2\ln(5x+4)-\frac{1}{3}\ln(1-x),$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{2x-1}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3x+2}-2\cdot\frac{5}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)},$$

$$y'=\frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left[\frac{6}{2x-1}+\frac{3}{2(3x+2)}-\frac{10}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)}\right].$$

Trouver les dérivées des fonctions suivantes:

631. $y=\dfrac{7}{x^3}$.

Réponse. $y'=-\dfrac{21}{x^4}$.

632. $y=\dfrac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x}$.

Réponse. $y'=\sqrt[3]{x}$.

633. $y=\dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}$.

Réponse. $y'=x^2\sqrt{x}\,(1-x^2)^2$.

634. $y=(x^2+2x+2)\,e^{-x}$.

Réponse. $y'=-x^2\cdot e^{-x}$.

635. $y=3x^3\cdot\ln x-x^3$.

Réponse. $y'=9x^2\cdot\ln x$.

636. $y=\dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}$.

Réponse. $y'=\left(\dfrac{8}{9}\right)^x\cdot\ln\dfrac{8}{9}$.

637. $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$.

Réponse. $y'=x^2\cdot\cos x$.

638. $y=\ln(2x^3+3x^2)$.

Réponse. $y'=\dfrac{6(x+1)}{2x^2+3x}$.

639. $y=\sqrt{1-3x^2}$.

Réponse. $y'=-\dfrac{3x}{\sqrt{1-3x^2}}$.

640. $y=x\cdot\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$.

Réponse. $y'=\arccos\dfrac{x}{2}$.

641. $y=\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

Réponse. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin\sqrt{x}$.

642. $y=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

Réponse. $y'=-\cos x$.

643. $y=\cos^3\dfrac{x}{3}$.

Réponse. $y'=-\cos^2\dfrac{x}{3}\cdot\sin\dfrac{x}{3}$.

644. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}$.

Réponse. $y'=\dfrac{1}{\sin\dfrac{2x+1}{2}}$.

645. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Réponse. $y'=\dfrac{1}{\cos x}$.

646. $y=\operatorname{tg}2x+\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 2x+\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 2x$.

Réponse. $y'=2\sec^6 2x$.

647. $y=\dfrac{1}{3}\sin^3\sqrt{x}-\dfrac{2}{5}\sin^5\sqrt{x}+\dfrac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}$.

Réponse. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin^2\sqrt{x}\cdot\cos^5\sqrt{x}$.

648. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$.

Réponse. $y'=\dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

649. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$.

Réponse. $y'=\sqrt{a^2-x^2}$.

650. $y=\ln\dfrac{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}-2\sqrt{\operatorname{tg}x}}{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}+2\sqrt{\operatorname{tg}x}}$.

Réponse. $y'=-\dfrac{2\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}x\,(4\operatorname{tg}x+1)}}$.

651. $y = \operatorname{cotg}^2 \frac{x}{2} - 2 \ln \sin \frac{x}{2}$.

Réponse. $y' = \operatorname{cotg}^3 \frac{x}{2}$.

652. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x^2 - 1}$.

Réponse. $y' = \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$.

653. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Réponse. $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

654. $y = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$.

Réponse. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

655. $y = \arcsin \frac{2x^3}{1+x^6}$ si $|x| < 1$.

Réponse. $y' = \frac{6x^2}{1+x^6}$.

656. $y = \arccos \frac{9-x^2}{9+x^2}$.

Réponse. $y' = \frac{6 \cdot \operatorname{sign} x}{x^2+9}$.

657. $y = e^{-x} - \sin(e^{-x}) \cdot \cos(e^{-x})$.

Réponse. $y' = -2e^{-x} \cdot \sin^2(e^{-x})$.

658. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Réponse. $y' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

659. $y = \ln \frac{(x-1)(x-3)^3}{(x-2)^3(x-4)}$.

Réponse. $y' = -\frac{6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$.

660. $y = 1 - e^{\sin^2 3x} \cdot \cos^2 3x$.

Réponse. $y' = 3e^{\sin^2 3x} \cdot \sin 6x \cdot \sin^2 3x$.

661. $y = \ln \frac{2 \ln^2 \sin x + 3}{2 \ln^2 \sin x - 3}$.

Réponse. $y' = -\frac{24 \ln \sin x \cdot \operatorname{cotg} x}{4 \ln^4 \sin x - 9}$.

662. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$.

Réponse. $y' = \sec x$.

663. $y = -\ln(\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x)$.

Réponse. $y' = \operatorname{cosec} x$.

664. $y = e^{\sqrt{2x}} \cdot (\sqrt{2x} - 1)$.

Réponse. $y' = e^{\sqrt{2x}}$.

665. $y = \ln \frac{x^5}{x^5+2}$.

Réponse. $y' = \frac{10}{x(x^5+2)}$.

666. $y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$.

Réponse. $y' = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$.

667. $y = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

Réponse. $y' = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

668. $y = -\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}$.

Réponse. $y' = \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$.

669. $y = \sin(\ln x) \cdot \cos(\ln x) - \ln \frac{1}{x}$.

Réponse. $y' = \frac{2\cos^2(\ln x)}{x}$.

670. $y = (x^5+3)[\ln(x^5+3) - 1]$.

Réponse. $y' = 5x^4 \cdot \ln(x^5+3)$.

671. $y = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}$.

Réponse. $y' = -\frac{x}{|x|\sqrt{5-x^2}}$.

672. $y = \frac{1}{2}[(x+\alpha)\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta} + (\beta-\alpha^2)\ln(x+\alpha+$
$+\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta})]$.

Réponse. $y' = \sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}$.

673. $y = \arcsin e^x + \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$.

Réponse. $y' = 0$.

674. $y = m\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta} + (n-m\alpha)\cdot\ln(x+\alpha+$
$+\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta})$.

Réponse. $y' = \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}}$.

675. $y = \frac{x}{\sqrt{1-mx^2}}$.

Réponse. $y' = \frac{1}{(1-mx^2)^{3/2}}$.

676. $y = x^2 + 2x \sin x \cos x + \cos^2 x$.

Réponse. $y' = 4x \cdot \cos^2 x$.

677. $y = \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x + \ln(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x)$.

Réponse. $y' = -2 \operatorname{cosec}^3 x$.

678. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \ln \sin x}$.

Réponse. $y' = \dfrac{\ln \sin x \cdot \cos x}{(1 + \ln \sin x)^2}$.

679. $y = 3x \cdot \sin^3 x + 3 \cos x - \cos^3 x$.

Réponse. $y' = 9x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$.

680. $y = \ln \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}$.

Réponse. $y' = \dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

681. $y = e^x - \sin e^x \cdot \cos^3 e^x - \sin^3 e^x \cdot \cos e^x$.

Réponse. $y' = 2e^x \cdot \sin^2 e^x$.

682. $y = \operatorname{arctg}(x+1) + \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$.

Réponse. $y' = \dfrac{2}{(x^2+2x+2)^2}$.

683. $y = x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6)$.

Réponse. $y' = \ln^3 x$.

684. $y = \ln \sin \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$.

Réponse. $y' = \dfrac{\ln \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$.

685. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x^x - x^{-x}}{2}$.

Réponse. $y' = \dfrac{2(1 + \ln x)}{x^x + x^{-x}}$.

686. $x = \dfrac{1}{64}\left(\operatorname{tg}^4 \dfrac{x}{2} - \operatorname{cotg}^4 \dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{1}{8}\left(\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} - \operatorname{cotg}^2 \dfrac{x}{2}\right) +$
$+ \dfrac{3}{8} \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

Réponse. $y' = \dfrac{1}{\sin^5 x}$.

687. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \cos x + \dfrac{1}{3} \cos^3 x$.

Réponse. $y' = \dfrac{\cos^4 x}{\sin x}$.

688. $y = -\dfrac{2 \cos \dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2} + 3 \cos \dfrac{x}{2}}$.

Réponse. $y' = \frac{1}{3\sin x + 4\cos x + 5}$.

689. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(\sin x) + \ln\cos(\sin x)$.

Réponse. $y' = \operatorname{tg}^3(\sin x \cdot \cos x)$.

690. $y = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$.

Réponse. $y' = \frac{1}{x^2(x-1)}$.

691. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$.

Réponse. $y' = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

692. $y = 2x \cdot \operatorname{tg} 2x + \ln\cos 2x - 2x^2$.

Réponse. $y' = 4x \cdot \operatorname{tg}^2 2x$.

693. $y = \arccos(2e^{2x} - 1)$.

Réponse. $y' = -\frac{2e^x}{\sqrt{1-2e^{2x}}}$.

694. $y = \ln\ln x(\ln\ln\ln x - 1)$.

Réponse. $y' = \frac{\ln\ln\ln x}{x\ln x}$.

695. $y = \frac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}$.

Réponse. $y' = \frac{2e^{2x}(1-2x)}{(x+e^{2x})^2}$.

696. $y = \ln\frac{x\ln x - 1}{x\ln x + 1}$.

Réponse. $y' = \frac{2(\ln x + 1)}{x^2\ln^2 x - 1}$.

697. $y = \operatorname{arctg}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

Réponse. $y' = \frac{3}{1+x^2}$.

698. $y = \frac{a}{2}\sin^2 x + \frac{b}{2}\cos^2 x - \frac{a+b}{4}\cos 2x$.

Réponse. $y' = a\sin 2x$.

699. $y = \ln\operatorname{tg}\frac{e^{2\sin x}}{4}$.

Réponse. $y' = \frac{e^{2\sin x}\cdot\cos x}{\sin\frac{e^{2\sin x}}{2}}$.

700. $y = \operatorname{tg}^3(\operatorname{tg} x) + 3\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$.

Réponse. $y' = 3\sec^2 x \cdot \sec^4(\operatorname{tg} x)$.

701. $y=\frac{\operatorname{arctg} x}{x}-\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Réponse. $y'=-\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$.

702. $y=\frac{\ln x}{x^5}+\frac{1}{5x^5}$.

Réponse. $y'=-\frac{5\ln x}{x^6}$.

703. $y=\sqrt{2x+1}\,[\ln(2x+1)-2]$.

Réponse. $y'=\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}$.

704. $y=\sec x\,(1+\ln\cos x)$.

Réponse. $y'=\sec x\cdot\operatorname{tg} x\cdot\ln\sec x$.

705. $y=e^x\cdot\sqrt{1-2^{2x}}-\arcsin e^x$.

Réponse. $y'=-\frac{2e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

706. $y=2^{\cos^3 x-3\cos x}$.

Réponse. $y'=3\cdot 2^{\cos^3 x-3\cos x}\cdot\sin^3 x\cdot\ln 2$.

707. $y=\frac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}$.

Réponse. $y'=\frac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}\cdot\ln\frac{32e}{81}$.

708. $y=\frac{x+1}{x}-e^{-\ln\frac{x}{x+1}}$.

Réponse. $y'=0$.

709. $y=x\cdot\sin x\cdot\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x$.

Réponse. $y'=x\cdot\cos 2x$.

710. $y=\frac{x^2\cdot e^{x^2}}{x^2+1}$.

Réponse. $y'=2e^{x^2}\cdot x\cdot\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

711. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x}$.

Réponse. $y'=\frac{x\cos x}{\sin^2 x}$.

712. $y=2\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)$.

Réponse. $y'=\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

713. $y=\frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

Réponse. $y'=\frac{x^2}{x^4-a^4}$.

714. $y=\ln\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$.

Réponse. $y'=-\frac{4x}{\sqrt{x^4+1}}$.

715. $y=e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x}\cdot\cos x$.

Réponse. $y'=e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sin x\operatorname{tg}^2 x$.

716. $y=\operatorname{arctg}\frac{2x^4}{1-x^8}$.

Réponse. $y'=\frac{8x^3}{1+x^8}$.

717. $y=x^2e^{x^2}\cdot\ln x$.

Réponse. $y'=xe^{x^2}(2x^2\ln x+2\ln x+1)$.

718. $y=\arccos\sqrt{1-2^x}$.

Réponse. $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^x}{1-2^x}}\cdot\ln 2$.

719. $y=-m\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta}+(m\alpha+n)\arcsin\frac{x-\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}}$.

Réponse. $y'=\frac{mx+n}{\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta}}$.

720. $y=\lg_{x^2}2$.

Réponse. $y'=-\frac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$.

721. $y=\lg_2\sin^2 x$.

Réponse. $y'=\frac{2}{\ln 2}\cdot\operatorname{cotg} x$.

722. $y=\lg_a(x+\sqrt{x^2+9})$.

Réponse. $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}\cdot\ln a}$.

723. $y=x^{\arcsin x}$.

Réponse. $y'=x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right)$.

724. $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$.

Réponse. $y'=8\cdot\frac{(x-1)^3}{(x+1)^5}$.

725. $y=\frac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}$.

Réponse. $y'=\frac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}\left(\ln 2+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$.

726. $y=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2+n^2}\cdot[(m+1)\cos(n\ln x)+n\sin(n\ln x)]$.

Réponse. $y'=x^m\cdot\cos(n\ln x)$.

727. $y=(x\operatorname{tg}x+\ln\cos x)\cdot\operatorname{tg}(x\operatorname{tg}x+\ln\cos x)+\ln\cos(x\operatorname{tg}x+$ $+\ln\cos x)$.

Réponse. $y'=(x\operatorname{tg}x+\ln\cos x)\sec^2(x\operatorname{tg}x+\ln\cos x)\,x\sec^2 x$.

728. $y(x\cos x-\sin x)\cdot[\ln(x\cos x-\sin x)-1]$.

Réponse. $y'=-x\sin x\cdot\ln(x\cos x-\sin x)$.

729. $y=\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$.

Réponse. $y'=-\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$.

730. $y=3\sin(xe^x-e^x)-\sin^3(xe^x-e^x)$.

Réponse. $y'=3\cos^3(xe^x-e^x)\cdot xe^x$.

731. $y=\arccos(2x\sqrt{1-x^2})$.

Réponse. $y'=-\frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}$.

732. $y=|x|\ (x\neq 0)$.

Réponse. $y'=\begin{cases}1, & \text{si } x>0;\\ -1, & \text{si } x<0.\end{cases}$

733. $y=|f(x)|$.

Réponse. $y'=\begin{cases}f'(x), & \text{si } f(x)>0;\\ -f'(x), & \text{si } f(x)<0.\end{cases}$

734. $y=|3x-5|$.

Réponse. $y'=\begin{cases}3, & \text{si } x>\frac{5}{3};\\ -3, & \text{si } x<\frac{5}{3}.\end{cases}$

735. $y=e^{|x|}$.

Réponse. $y'=\begin{cases}e^x, & \text{si } x>0;\\ -e^{-x}, & \text{si } x<0.\end{cases}$

736. $y=|x|+|x-2|$.

Réponse. $y'=\begin{cases}-2, & \text{si } x<0;\\ 0, & \text{si } 0<x<2:\\ 2, & \text{si } x>2\end{cases}$

737. $y = xe^x(\sin x - \cos x) + e^x \cdot \cos x$.

Réponse. $y' = 2xe^x \sin x$.

738. $y = \ln[x \cdot \sin x + \cos x + \sqrt{(x \sin x + \cos x)^2 + 1}]$.

Réponse. $y' = \dfrac{x \cos x}{\sqrt{(x \sin x + \cos x)^2 + 1}}$.

739. $y = \dfrac{x^x}{e^x}(x \ln x - x - 1)$.

Réponse. $y' = x(\ln x - 1) \cdot \dfrac{x^x}{e^x} \ln x$.

740. $y = \lg_{\cos x} \sin x$.

Réponse. $y' = \dfrac{\operatorname{cotg} x \cdot \ln \cos x + \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x}{\ln^2 \cos x}$.

741. $y = \lg_{e^2}(x^n + \sqrt{x^{2n} + 1})$.

Réponse. $y' = \dfrac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^{2n} + 1}}$.

742. $y = \lg_x e$.

Réponse. $y' = -\dfrac{(\lg_x e)^2}{x}$.

743. $y = \lg_{x^2} x$.

Réponse. $y' = 0$.

744. $y = \lg_{x^2} x^x$.

Réponse. $y' = \dfrac{1}{2}$.

745. $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$.

Réponse. $y' = 0$.

746. $y = x^x$.

Réponse. $y' = x^x(1 + \ln x)$.

747. $y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2$.

Réponse. $y' = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2 \left(\ln 2 + \dfrac{2}{x} - 1 - \ln x\right)$.

748. $y = x^{\ln x}$.

Réponse. $y' = 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$.

749. $y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$.

Réponse. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}} \cdot \left[\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{5x-1}\right]$.

750. Montrer que $(\sec x)' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$.

751. Montrer que $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$.

752. Montrer que $(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \ln u$.

753. Etablir les formules de dérivation de $\operatorname{arcsec} x$ et $\operatorname{arccosec} x$.

Réponse. $(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $(\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

754. Que devient l'expression $u = y^2 + y'^2 + \frac{4y^2}{y'^2}$ si $y = 2\cos x$?

Réponse. $4 \operatorname{cosec}^2 x$.

755. Montrer que la fonction $y = (x^2+1)(e^x + C)$ fait de l'équation $y' - \frac{2xy}{x^2+1} = e^x(x^2+1)$ une identité.

2. Dérivation des fonctions implicites. Soit $F(x, y) = 0$ une équation qui définit y comme une fonction implicite par rapport à x. Dans tout ce qui suit, on va considérer cette fonction comme dérivable.

En dérivant par rapport à x les deux membres de l'équation $F(x, y) = 0$, on obtient une équation du premier degré par rapport à y'. On en déduit facilement y', c'est-à-dire la dérivée de la fonction implicite.

756. Trouver la dérivée y'_x à partir de l'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Solution. Vu que y est fonction de x, alors y^2 sera considérée comme une fonction de fonction par rapport à x. Ainsi, $(y^2)' = 2yy'$. En dérivant par rapport à x les deux membres de cette équation, on obtient $2x + 2yy' = 0$, c'est-à-dire $y' = -\frac{x}{y}$.

757. Trouver la dérivée y'_x à partir de l'équation $x^3 + \ln y - x^2e^y = 0$.

Solution. En dérivant par rapport à x les deux membres de l'équation, on a

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2e^y \cdot y' - 2xe^y = 0,$$

d'où

$$y' = \frac{(2xye^y - 3x^2)\,y}{1 - x^2ye^y}.$$

Trouver la dérivée y'_x des fonctions implicites :

758. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Réponse. $y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$.

759. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Réponse. $y' = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}$.

760. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0.$

Réponse. $y' = \frac{x}{3y}$.

761. $x^y - y^x = 0.$

Réponse. $y' = \frac{y(y - x\ln y)}{x(x - y\ln x)}$.

762. $x\sin y + y\sin x = 0.$

Réponse. $y' = -\frac{y\cos + \sin y}{x\cos y + \sin x}$.

763. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0.$

Réponse. $y' = -\frac{e^x - y\cdot 2^{xy}\cdot\ln 2}{e^y - x\cdot 2^{xy}\cdot\ln 2}$.

764. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0.$

Réponse. $y' = 2x$.

765. $\frac{y}{x} + e^{y/x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0.$

Réponse. $y' = \frac{y}{x}$.

766. $x^{y^2} + y^2\cdot\ln x - 4 = 0.$

Réponse. $y' = -\frac{y}{2x\cdot\ln x}$.

767. $x^2\sin y + y^3\cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$

Réponse. $y' = -\frac{2x\sin y - y^3\sin x - 2}{x^2\cos y + 3y^2\cos x - 3}$.

3. Dérivation des fonctions données sous forme paramétrique. Si une fonction y de la variable x est donnée sous forme d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

on a alors

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

ou bien, à l'aide d'autres notations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

768. Trouver $y' = \frac{dy}{dx}$, si

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$$

Solution. Trouvons $\frac{dx}{dt}=3t^2+3$ et $\frac{dy}{dt}=15t^4+15t^2$. Par conséquent,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{15t^4+15t^2}{3t^2+3}=5t^2.$$

769. Trouver $y'=\frac{dy}{dx}$, si

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t. \end{cases}$$

Réponse. $y'=-\operatorname{cotg} t$.

770. Trouver $y'=\frac{dy}{dx}$, si $x=e^{-t}\cdot\sin t$, $y=e^{t}\cdot\cos t$.

Réponse. e^{2t}.

771. Trouver $\rho'=\frac{d\rho}{d\theta}$, si $\rho=\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}+1\right)\cdot\alpha$, $\theta=\sqrt{\alpha}\cdot e^{\sqrt{\alpha}}$.

Réponse. $2\sqrt{\alpha}\cdot e^{-\sqrt{\alpha}}$

772. Trouver $y'=\frac{dy}{dx}$, si

$$\begin{cases} x=\operatorname{ch} t, \\ y=\operatorname{sh} t. \end{cases}$$

Réponse. $\operatorname{cth} t$.

4. Applications géométriques et mécaniques de la dérivée. Si une courbe est donnée par l'équation $y=f(x)$, alors $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, où α est l'angle fait par la direction positive de l'axe Ox avec la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0.

L'*équation de la tangente* à une courbe $y=f(x)$ au point $M_0(x_0;\ y_0)$ est

$$y-y_0=y'_0(x-x_0),$$

où y'_0 est la valeur de la dérivée y' au point $M_0(x_0;\ y_0)$.

On appelle *normale* à la courbe la droite qui est perpendiculaire à la tangente et qui passe par le point de tangence.

La *normale* est donnée par l'*équation*

$$y-y_0=-\frac{1}{y'_0}(x-x_0).$$

On appelle *angle de deux courbes* $y=f_1(x)$ et $y=f_2(x)$ au point de leur intersection $M_0(x_0;\ y_0)$ l'angle formé par les tangentes à ces courbes au point M_0. On trouve cet angle d'après la formule

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f'_2(x_0)-f'_1(x_0)}{1+f'_1(x_0)\cdot f'_2(x_0)}.$$

Si, lors du mouvement rectiligne d'un point, la loi du mouvement est donnée par la formule

$$s=s(t),$$

la vitesse du mouvement à un certain instant t_0 est la dérivée de l'espace parcouru par rapport au temps:

$$v=s'(t_0).$$

773. Quel angle forme avec l'axe des abscisses la tangente à la courbe $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ tracée au point d'abscisse $x = 1$?

Solution. Trouvons la dérivée $y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$; pour $x = 1$, $y' = 3$, c'est-à-dire $\operatorname{tg}\alpha = 3$, d'où l'on tire

$$\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71° 34'.$$

774. Quel angle forme avec l'axe des abscisses la tangente à la parabole $y = x^2 - 3x + 5$, tracée au point M (2; 3)? Ecrire l'équation de cette tangente.

Réponse. $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $y = x + 1$.

775. Former les équations de la tangente et de la normale à la courbe $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ au point M (1; —1).

Solution. En partant de l'équation de la courbe, trouvons la dérivée

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0, \text{ c'est-à-dire } y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}.$$

Par conséquent, $y'_0 = -\frac{1+(-1)^2}{2\cdot 1(-1)+6(-1)^3} = \frac{1}{4}$.

L'équation de la tangente est de la forme

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1), \text{ ou } x - 4y - 5 = 0.$$

L'équation de la normale est

$$y + 1 = -4(x - 1), \quad \text{ou} \quad 4x + y - 3 = 0.$$

776. Trouver l'angle formé par les paraboles $y = 8 - x^2$ et $y = x^2$.

Solution. En résolvant les équations des paraboles de façon à les satisfaire en même temps, trouvons leurs points d'intersection A (2; 4) et B (—2; 4). Dérivons les équations des paraboles: 1) $y' = -2x$, 2) $y' = 2x$. Trouvons les coefficients angulaires des tangentes aux paraboles au point A (c'est-à-dire les valeurs des dérivées pour $x = 2$): $k_1 = -4$, $k_2 = 4$. Par conséquent, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{4+4}{1-16} = -\frac{8}{15}$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(-8/15)$. De même on obtient l'angle des courbes au point B: $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$.

777. Trouver l'équation de la normale à la parabole $y^2 = 2px$ au point M $(x_0; y_0)$.

Réponse. $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$.

778. Former l'équation de la tangente à l'hyperbole $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$ tracée au point $M(-9;-8)$ de l'hyperbole.

Réponse. $x-y+1=0$.

779. Former les équations de la tangente et de la normale à l'astroïde $x=\sqrt{2}\cos^3 t$, $y=\sqrt{2}\sin^3 t$, tracées au point pour lequel $t=\frac{\pi}{4}$.

Réponse. $x+y-1=0$; $x-y=0$.

780. Former les équations de la tangente et de la normale à la cycloïde $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, tracées au point pour lequel $t=\frac{\pi}{2}$.

Réponse. $x-y+2-\frac{\pi}{2}=0$; $x+y-\frac{\pi}{2}=0$.

781. Former les équations de la tangente et de la normale à la parabole semi-cubique $x=t^2$, $y=t^3$ tracées au point pour lequel $t=2$.

Réponse. $3x-y-4=0$; $x+3y-28=0$.

782. Montrer que la tangente à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ au point $M(x_0;\ y_0)$ est régie par l'équation $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

783. Quel angle forme avec l'axe des abscisses la tangente à la courbe $y=\operatorname{sh} x$ au point $(0;0)$ de la courbe?

Réponse. $\frac{\pi}{4}$.

784. Former les équations de la tangente et de la normale à la chaînette $y=\operatorname{ch}\frac{x}{2}$ au point où $x=2\ln 2$.

Réponse. $3x-8y+10-6\ln 2=0$; $32x+12y-15-64\ln 2=0$.

785. Former l'équation de la tangente à l'hyperbole équilatère $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$ au point $t=t_0$.

Réponse. $x\operatorname{ch} t_0-y\operatorname{sh} t_0-1=0$.

786. Trouver l'angle formé par la courbe $y=x-x^3$ avec la droite $y=5x$.

Réponse. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{3}$.

787. Trouver l'angle formé par les courbes $y=x^3$ et $y=\frac{1}{x^2}$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$.

788. Trouver l'angle formé par les lignes $y=1+\sin x$, $y=1$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.

789. Trouver l'angle formé par les courbes $x^2 + y^2 = 5$, $y^2 = 4x$.
Réponse. $\operatorname{tg} \varphi_1 = 3$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = -3$.

790. Trouver l'angle formé par les courbes $y = \sqrt{2} \sin x$, $y = \sqrt{2} \cos x$.

Réponse. $\frac{\pi}{2}$.

791. Lors du mouvement rectiligne d'un point l'espace parcouru en fonction du temps est donné par l'équation

$$s = \frac{1}{5} t^5 + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi t}{8}$$

(t en secondes, s en mètres). Calculer la vitesse du mouvement au bout de la deuxième seconde.

Solution. Trouvons la dérivée de l'espace par rapport au temps:

$$\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi t}{8}.$$

En posant $t = 2$, on a $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8}\sqrt{2} \approx 16{,}18$. Par conséquent, $v \approx 16{,}18$ m/s.

792. Un point se déplace sur la parabole $y = x(8 - x)$ de manière que son abscisse varie en fonction du temps t suivant la loi $x = t\sqrt{t}$ (t en secondes, x en mètres). Quelle est la vitesse de variation de l'ordonnée au point M (1 ; 7)?

Solution. Trouvons la loi de variation de l'ordonnée et pour ce faire, substituons t à x dans l'équation de la parabole:

$$y = 8t\sqrt{t} - t^3.$$

La vitesse de variation de l'ordonnée sera définie par la dérivée de l'ordonnée par rapport au temps:

$$y'_t = 12\sqrt{t} - 3t^2.$$

Pour le point M (1 ; 7), la valeur de t est égale à 1. Donc, on obtient $y'_{t=1} = 9$, c'est-à-dire la vitesse de variation de l'ordonnée est de 9 m/s.

793. L'espace parcouru en fonction du temps est donné par l'équation $s = t \cdot \ln(t + 1)$ (t en secondes, s en mètres). Trouver la vitesse de déplacement au bout de la deuxième seconde.

Réponse. 1,76 m/s.

794. Un point se déplace sur la parabole cubique $y = x^3$ de manière que son ordonnée varie en fonction du temps t suivant la loi $y = at^3$. Quelle est la vitesse de variation de l'abscisse en fonction du temps?

Réponse. $x'_t = \sqrt[3]{a}$.

5. **Dérivées d'ordre supérieur.** On appelle *dérivée du deuxième ordre* ou *dérivée seconde* d'une fonction $y = f(x)$ la dérivée de sa dérivée, c'est-à-dire $(y')'$.

La dérivée seconde est désignée comme suit:

$$y'', \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{ou} \quad f''(x).$$

Si $s = f(t)$ est la loi du mouvement rectiligne d'un point, alors la dérivée seconde de l'espace parcouru par rapport au temps $\frac{d^2s}{dt^2}$ est l'accélération de ce mouvement.

De façon identique, la *dérivée du troisième ordre* de la fonction $y = f(x)$ est la dérivée de la dérivée du second ordre:

$$y''' = (y'')'.$$

D'une manière générale, la *dérivée d'ordre n* ou la *dérivée n-ième* d'une fonction $y = f(x)$ est la dérivée de la dérivée d'ordre $(n-1)$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

La dérivée n-ième est désignée à l'aide des notations:

$$y^{(n)}, \quad \text{ou} \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad \text{ou} \quad f^{(n)}(x).$$

Les dérivées d'ordre supérieur (seconde, troisième, etc.) se calculent par dérivation continue de la fonction donnée.

Si une fonction est donnée sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

alors les dérivées y'_x, y''_{xx}, ... se calculent d'après les formules

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \text{ etc.}$$

Pour le calcul de la dérivée du second ordre on peut aussi faire usage de la formule

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

795. Soit $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Trouver $y', y'', y''', \ldots$

Solution. On a

$$y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2},$$

$$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2,$$

$$y''' = 60x^2 + 48x - 18,$$

$$y^{\text{IV}} = 120x + 48, \quad y^{\text{V}} = 120, \quad y^{\text{VI}} = y^{\text{VII}} = \ldots = 0.$$

796. Posons $y = \ln x$. Trouver $y^{(n)}$.

Solution. On a

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
$$y'' = -1 \cdot x^{-2},$$
$$y''' = 1 \cdot 2x^{-3},$$
$$y^{\mathrm{IV}} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)(-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

797. Posons $y = 2^x$. Trouver $y^{(n)}$.

Solution. On a $y' = 2^x \cdot \ln 2$, $y'' = 2^x \cdot \ln^2 2$,

$$y''' = 2^x \cdot \ln^3 2, \ \ldots, \ y^{(n)} = 2^n \ln^n 2.$$

798. Posons $y = \sin x$. Trouver $y^{(n)}$.

Solution. On a

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

799. Trouver $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, si

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Solution. On a

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(a\sin^3 t)'_t}{(a\cos^3 t)'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t;$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a\cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

Trouver les dérivées du second ordre des fonctions:

800. $y = -\frac{22}{x+5}$.

Réponse. $y'' = -\frac{44}{(x+5)^3}$.

801. $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$.

Réponse. $y'' = \ln x$.

802. $y = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \cdot \arcsin x$.

Réponse. $y'' = 2\sqrt{1-x^2}$.

803. $y = -\frac{1}{9}x \cdot \sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$.

Réponse. $y'' = x \cdot \sin 3x$.

804. $y = x\ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \sqrt{x^2+a^2}$.

Réponse. $y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

805. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Réponse. $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a}\operatorname{cosec}^4\frac{t}{2}$.

806. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t-t^2}. \end{cases}$

Réponse. $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -4\sqrt{t-t^2}$.

807. Montrer que la fonction $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ satisfait à l'équation $x^2y'' + xy' + y = 0$.

808. Montrer que la fonction $y = x + \sin 2x$ satisfait à l'équation $y'' + 4y = 4x$.

809. Lors du mouvement rectiligne d'un point, l'espace parcouru en fonction du temps est donné par l'équation $s = \sqrt{t}$. Trouver l'accélération du point au bout de la quatrième seconde.

Réponse. $-1/32$ m/s^2.

Trouver les dérivées du troisième ordre des fonctions:

810. $y = \frac{x}{6(x+1)}$.

Réponse. $y''' = \frac{1}{(x+1)^4}$.

811. $y = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

Réponse. $y''' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$.

812. $y = (2x+3)^3\sqrt{2x+3}$.

Réponse. $y''' = 105\sqrt{2x+3}$.

813. $y = \operatorname{sh}^2 x$.

Indication. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Réponse. $y''' = 4 \operatorname{sh} 2x$.

Trouver les dérivées d'ordre n des fonctions :

814. $y = x^n \cdot \sqrt{x}$.

Réponse : $y^{(n)} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}{2^n} \sqrt{x}$.

815. $y = \dfrac{1}{2x+1}$.

Réponse : $y^{(n)} = \dfrac{n!\,(-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}$.

816. $y = 5 - 3\cos^2 x$.

Réponse : $y^{(n)} = -\dfrac{3}{2} \cdot 2^n \cdot \cos\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

817. $y = 2^x + 2^{-x}$.

Réponse : $y^{(n)} = [2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x}] \ln^n 2$.

818. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Réponse. $y^{(n)} = \dfrac{n!\,(ad-bc)\,(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$.

819. $y = e^{kx}$.

Réponse. $y^{(n)} = k^n \cdot e^{kx}$.

820. $y = \cos x$.

Réponse. $y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

821. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

Réponse. $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{t}$.

822. $\begin{cases} x = at + b, \\ y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma. \end{cases}$

Réponse. $y''' = y^{\mathrm{IV}} = \ldots = 0$.

823. Montrer que la fonction $y = e^x + 2e^{2x}$ satisfait à l'équation $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

824. Montrer que la fonction $y = x^3$ satisfait à l'équation $y^{\mathrm{V}} + y^{\mathrm{IV}} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$.

6. Différentielles du premier ordre et d'ordres supérieurs. On appelle *différentielle (du premier ordre) d'une fonction* $y = f(x)$ la partie principale de son accroissement, linéaire par rapport à l'accroissement de la variable indépendante. On appelle différentielle de la variable indépendante l'accroissement

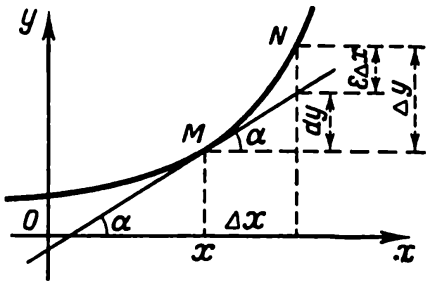


Fig. 27

de cette dernière : $dx = \Delta x$. La différentielle d'une fonction est égale au produit de sa dérivée par la différentielle de la variable indépendante :

$$dy = y'\,dx.$$

Géométriquement la différentielle se présente comme l'accroissement de l'ordonnée de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point $M(x;\ y)$ (fig. 27).

Propriétés fondamentales des différentielles

1) $dC = 0$, où $C = \text{const}$,
2) $d(Cu) = C \cdot du$,
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$,
4) $d(uv) = u\,dv + v\,du$,
5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $(v \neq 0)$,
6) $df(u) = f'(u)\,du$.

Si l'accroissement Δx de la variable indépendante est petit en valeur absolue, alors

$$\Delta y \approx dy$$

et

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Ainsi, la différentielle d'une fonction peut être appliquée aux calculs approchés.

La *différentielle du deuxième ordre* d'une fonction $y = f(x)$ est par définition la différentielle de la différentielle du premier ordre :

$$d^2y = d(dy).$$

De façon identique, on définit la notion de différentielle du troisième ordre

$$d^3y = d(d^2y).$$

D'une manière générale, $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Si $y = f(x)$, x étant la variable indépendante, alors les différentielles d'ordre supérieur se calculent d'après les formules

$$d^2y = y''(dx)^2,$$
$$d^3y = y'''(dx)^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

825. Trouver la différentielle de la fonction $y = \operatorname{arctg} x$.

Solution. On a $dy = (\operatorname{arctg} x)' \cdot dx = \frac{dx}{1+x^2}$.

826. Trouver la différentielle de la fonction $s = e^{t^3}$.

Solution. On a $ds = e^{t^3} \cdot 3t^2\, dt$.

827. Trouver les différentielles des premier, deuxième et troisième ordres de la fonction $y = (2x - 3)^3$.

Solution. On a

$$dy = 3(2x-3)^2 \cdot 2\, dx = 6(2x-3)^2\, dx,$$
$$d^2y = 12(2x-3) \cdot 2\, dx^2 = 24(2x-3)\, dx^2,$$
$$d^3y = 24 \cdot 2\, dx^3 = 48\, dx^3.$$

828. Calculer les différentielles du premier et du deuxième ordre de la fonction $v = e^{2t}$.

Solution. On a $dv = 2e^{2t}\, dt$, $d^2v = 4e^{2t} \cdot dt^2$.

829. Comparer l'accroissement à la différentielle de la fonction $y = 2x^3 + 5x^2$.

Solution. On trouve

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 2x^3 - 5x^2 =$$
$$= (6x^2 + 10x)\,\Delta x + (6x + 5)\,\Delta x^2 + 2\Delta x^3,\ dy = (6x^2 + 10x)\, dx.$$

La différence entre l'accroissement Δy et la différentielle dy est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx, égal à $(6x + 5)\,\Delta x^2 + 2\Delta x^3$.

830. Calculer la valeur approchée de arcsin 0,51.

Solution. Examinons la fonction $y = \arcsin x$. En posant $x = 0{,}5$, $\Delta x = 0{,}01$ et en appliquant la formule $\arcsin(x + \Delta x) \approx \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \cdot \Delta x$, on obtient

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513.$$

831. Calculer la valeur approchée de l'aire du cercle dont le rayon est égal à 3,02 m.

Solution. En s'appuyant sur la formule $S = \pi R^2$ et en posant $R = 3$, $\Delta R = 0{,}02$, on a

$$\Delta s \approx ds = 2\pi R \cdot \Delta R = 2\pi \cdot 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}12\pi.$$

Par conséquent, l'aire du cercle de rayon 3,02 m a la valeur approchée $9\pi + 0{,}12\pi = 9{,}12\pi \approx 28{,}66$ m².

832. Calculer la différentielle de la fonction

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2} \arcsin \frac{x}{7}.$$

Réponse. $dy = \sqrt{49 - x^2}\, dx$.

833. Calculer la différentielle de la fonction $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$.

Réponse. $dy=\frac{dx}{x^2-36}$.

834. Calculer la différentielle de la fonction $y=2\ln\operatorname{ch}\frac{x}{2}$.

Réponse. $dy=\operatorname{th}\frac{x}{2}\,dx$.

835. Calculer la différentielle de la fonction $y=\operatorname{arctg} e^{2x}$.

Réponse. $dy=\frac{2e^{2x}\,dx}{1+e^{4x}}$.

836. $y=x(\ln x-1)$. Trouver dy, d^2y, d^3y.

Réponse. $dy=\ln x\,dx$, $d^2y=\frac{dx^2}{x}$, $d^3y=-\frac{dx^3}{x^2}$.

837. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$. Trouver d^2y.

Réponse. $d^2y=\frac{-x\,dx^2}{(x^2+4)^{3/2}}$.

838. Comparer l'accroissement à la différentielle de la fonction $y=\frac{1}{x}$.

Réponse. $\Delta y=-\frac{\Delta x^2}{x(x+\Delta x)}$, $dy=-\frac{\Delta x}{x^2}$.

La différence $\Delta y-dy=\frac{\Delta x}{x^2(x+\Delta x)}$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx si $x\neq 0$ et $x+\Delta x\neq 0$.

839. Calculer Δy et dy pour la fonction $y=x^2-2x$ si $x=3$ et $\Delta x=0{,}01$.

Réponse. $\Delta y=0{,}0401$; $dy=0{,}04$.

840. Calculer la valeur approchée de arctg 1,05.

Réponse. 0,811.

841. Calculer la valeur approchée du volume de la sphère de rayon 2,01 m.

Réponse. 34,04 m³.

842. Calculer la valeur approchée de tg 46°.

Réponse. 1,035.

843. Calculer la valeur approchée de ln tg 47° 15′.

Réponse. 0,078.

844. Calculer la valeur approchée de x à partir de l'équation

$$13\sin x-15\cos x=0.$$

Réponse. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{13}$.

845. Calculer la valeur approchée de $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Réponse. 1,9938.

§ 2. Etude des fonctions

1. Théorèmes de Rolle, de Lagrange, de Cauchy et formule de Taylor.

Théorème de Rolle. *Si une fonction $f(x)$ est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable dans l'intervalle (a, b) et que $f(a) = f(b)$, alors dans l'intervalle (a, b) il existe au moins une valeur de $x = \xi$ pour laquelle $f'(\xi)$ s'annule.*

Si notamment $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, le théorème de Rolle signifie qu'entre deux racines de la fonction il existe au moins une racine de sa dérivée.

Théorème de Lagrange (concernant l'accroissement fini). *Si une fonction $f(x)$ est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable dans l'intervalle (a, b), alors il existe dans cet intervalle au moins une valeur de $x = \xi$ pour laquelle est satisfaite l'égalité suivante*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

Les deux théorèmes ont l'interprétation géométrique suivante : sur l'arc AB de la courbe continue $y = f(x)$, possédant en chaque point intérieur à cet arc une tangente définie (non parallèle à l'axe Oy), il existe au moins un point intérieur où la tangente est parallèle à la corde AB. (Pour le théorème de Rolle, la corde AB tout comme la tangente sont parallèles à l'axe Ox.)

Théorème de Cauchy. *Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont continues sur un segment $[a, b]$ et dérivables dans l'intervalle (a, b), et si $\varphi'(x) \neq 0$, il existe alors, dans cet intervalle, au moins une valeur de $x = \xi$ telle que l'on ait*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

où $a < \xi < b$.

Formule de Taylor. *Une fonction $f(x)$ $n + 1$ fois dérivable dans un intervalle comportant un point a peut être présentée sous forme de la somme d'un polynôme de n-ième degré et d'un terme résiduel R_n :*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

où $a \gtrless \xi \lessgtr x$ ou $\xi = a + \theta(x - a)$ pour $0 < \theta < 1$.

En posant $a = 0$, on obtient la formule de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Citons les développements de certaines fonctions d'après la formule de Maclaurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n;$$

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^{2m-1}(-1)^{m+1}}{(2m-1)!} + R_{2m};$$

$$R_{2m} = (-1)^m \cos \theta x \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2m}(-1)^m}{(2m)!} + R_{2m+1};$$

$$R_{2m+1} = (-1)^{m+1} \cos \theta x \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!};$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!} x^n + R_n;$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1} \quad (\text{partout } 0 < \theta < 1).$$

846. Le théorème de Rolle sera-t-il vérifié pour la fonction $f(x) = x^2 - 6x + 100$ si $a = 1$, $b = 5$? Pour quelle valeur de ξ?

Solution. Etant donné que la fonction $f(x)$ est continue et dérivable pour toutes les valeurs de x et que les valeurs de la fonction $f(x)$ aux extrémités du segment $[1, 5]$ sont égales entre elles, c'est-à-dire $f(1) = f(5) = 95$, alors le théorème de Rolle sera vérifié sur le segment $[1, 5]$. La valeur de ξ sera définie à partir de l'équation $f'(x) = 2x - 6 = 0$, c'est-à-dire $\xi = 3$.

847. Le théorème de Rolle sera-t-il vérifié pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ si $a = 0$, $b = 8$? Pour quelle valeur de ξ?

Solution. La fonction $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ est continue pour toutes les valeurs de x et possède une dérivée $f'(x) = \frac{8-2x}{3\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}}$ pour $x \neq 0$, $x \neq 8$, c'est-à-dire elle est dérivable dans l'intervalle $(0, 8)$. En outre, $f(0) = f(8) = 0$. Ainsi, le théorème de Rolle sera vérifié dans le segment $[0, 8]$ et $f'(x) = 0$ pour $x = \xi = 4$.

848. On donne la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$. Soit $a = 0$, $b = 16$. Alors $f(0) = f(16) = 4$.

Toutefois, la dérivée $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-8}}$ ne s'annule en aucun point de l'intervalle $(0, 16)$. Y existe-t-il des contradictions au théorème de Rolle?

Solution. Non, car au point $x = 8$ de l'intervalle $(0, 16)$ la dérivée n'existe pas et les conditions du théorème de Rolle ne sont pas remplies.

849. Montrer que la dérivée $f'(x)$ du polynôme $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ possède une racine réelle dans l'intervalle $(-1, 1)$.

Solution. Calculons les racines du polynôme donné: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, ou $(x-1)^2(x+1) = 0$, c'est-à-dire $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$. D'après le théorème de Rolle, si $f(-1) = f(1) = 0$, alors $f'(x)$ possède une racine dans l'intervalle $(-1, 1)$. Calculons les racines de la dérivée du polynôme $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$, c'est-à-dire $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$. Ainsi, entre les racines -1 et 1 de la fonction il existe une racine de la dérivée égale à $-\frac{1}{3}$.

850. Trouver les coordonnées du point M situé sur l'arc AB de la courbe $y = 2x - x^2$ si la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la corde AB et si A (1; 1), B (3; —3).

Solution. La fonction $y = 2x - x^2$ est continue et dérivable pour toutes les valeurs de x. D'après le théorème de Lagrange, il existe entre deux valeurs $a = 1$ et $b = 3$ la valeur de $x = \xi$ satisfaisant à l'égalité $y(b) - y(a) = (b - a)\, y'(\xi)$, où $y' = 2 - 2x$. Portons les données fournies par les conditions du problème: $y(3) - y(1) = (3 - 1)\, y'(\xi)$, c'est-à-dire $(2 \cdot 3 - 3^2) - (2 \cdot 1 - 1^2) = (3 - 1) \cdot (2 - 2\xi)$, ou $-4 = 4(1 - \xi)$. D'où $\xi = 2$, $y(2) = 0$. Ainsi, le point M est de coordonnées (2; 0).

851. Sur l'arc AB d'une courbe donnée sous forme paramétrique par les équations $x = t^2$, $y = t^3$, trouver le point M en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la corde AB si pour le point A, $t = 1$, et pour le point B, $t = 3$.

Solution. Le coefficient angulaire de la corde AB est égal à $\frac{y(3) - y(1)}{x(3) - x(1)}$, alors que le coefficient angulaire de la tangente au point M (pour $t = \xi$) est égal à

$$\frac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}, \quad \text{où} \quad x'_t = 2t, \; y'_t = 3t^2.$$

Pour déterminer ξ, on obtient d'après le théorème de Cauchy l'équation $\frac{y(3) - y(1)}{x(3) - x(1)} = \frac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}$, ou $\frac{27 - 1}{9 - 1} = \frac{3\xi^2}{2\xi}$, $\frac{13}{4} = \frac{3}{2}\xi$, c'est-à-dire $\xi = \frac{13}{6}$. La valeur de ξ trouvée satisfait à l'inégalité $1 < \xi < 3$.

En portant la valeur de $t = \xi$ dans l'équation paramétrique, on obtient $x = \frac{169}{36}$, $y = \frac{2197}{216}$. Donc, le point cherché M est de coordonnées $\left(4\frac{25}{36}; 10\frac{37}{216}\right)$.

852. Mettre la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ sous la forme d'un polynôme du cinquième degré par rapport au binôme $(x - 1)$.

Solution. Calculons les valeurs de la fonction $f(x) = x^{1/3}$ et de ses dérivées jusqu'au cinquième ordre inclusivement pour $a = 1$:

$$f(1) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f'(1) = \frac{1}{3};$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, \quad f''(1) = -\frac{2}{9};$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}, \quad f'''(1) = \frac{10}{27};$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = -\frac{80}{81}x^{-11/3}, \quad f^{\mathrm{IV}}(1) = -\frac{80}{81};$$

$$f^{\mathrm{V}}(x) = \frac{880}{243}x^{-14/3}, \quad f^{\mathrm{V}}(1) = \frac{880}{243}.$$

Par conséquent, d'après la formule de Taylor, on obtient

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+$$
$$+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-5)^5+R_5,$$

où

$$R_5=\frac{f^{\mathrm{VI}}(\xi)}{6!}(x-1)^6=-\frac{12320}{729\cdot 6!}\cdot\xi^{-17/3}(x-1)^6,\quad 1<\xi<x.$$

853. Mettre la fonction $f(x)=a^x$ $(a>0)$ sous la forme d'un polynôme du troisième degré par rapport à x.

Solution. On a

$$\begin{aligned} f(x)&=a^x, & f(0)&=1.\\ f'(x)&=a^x\ln a, & f'(0)&=\ln a,\\ f''(x)&=a^x\ln^2 a, & f''(0)&=\ln^2 a,\\ f'''(x)&=a^x\ln^3 a, & f'''(0)&=\ln^3 a,\\ f^{\mathrm{IV}}(x)&=a^x\ln^4 a, & f^{\mathrm{IV}}(\theta x)&=\ln^4 a\cdot a^{\theta x}. \end{aligned}$$

D'après la formule de Maclaurin, on obtient

$$a^x=1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\frac{x^3\ln^3 a}{3!}+R_3,$$

où $R_3=\frac{x^2\ln^4 a}{4!}a^{\theta x}$, $0<\theta<1$.

854. Calculer à 10^{-3} près la valeur approchée de $\sqrt[3]{29}$.

Solution. Mettons le radical donné sous la forme: $\sqrt[3]{29}=$ $=\sqrt[3]{27+2}=3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{1/3}$. Faisons usage du développement du binôme

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+$$
$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{n!}x^n+R_n.$$

D'où l'on tire une égalité approchée

$$(1+x)^m\cong 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+$$
$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

dont l'erreur

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$$

peut être rendue aussi petite que l'on veut pour $|x| < 1$, la valeur de n étant suffisamment grande.

En posant $x = \frac{2}{27}$ et $m = \frac{1}{3}$, on obtient

$$\sqrt[3]{29} \cong 3\left(1 + \frac{2}{81} - \frac{2\cdot 2}{81\cdot 81} + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3} - \frac{2^5\cdot 5}{81^4} + \ldots + R_n\right).$$

En évaluant les valeurs des erreurs successives de calcul de $3\,|R_n|$, on trouve :

$$3\,|R_1| < \frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2} < 0{,}002,$$

$$3\,|R_2| < \frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3} < 0{,}0003.$$

Par conséquent, pour effectuer le calcul à une valeur donnée près, il suffit de prendre trois termes qui précèdent le reste R_2, c'est-à-dire

$$\sqrt[3]{29} \cong 3\,(1 + 0{,}024 - 0{,}0006) = 3{,}072.$$

855. Calculer $\sqrt{e}$ à 0,0001 près.

S o l u t i o n. Utilisons la formule de Maclaurin pour la fonction e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + R_n,$$

où

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)\,!}\,x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

En posant $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1\,!} + \frac{1}{2^2\cdot 2\,!} + \frac{1}{2^3\cdot 3\,!} + \ldots + \frac{1}{2^n\cdot n\,!} + R_n,$$

où

$$R_n = \frac{e^{\theta/2}}{2^{n+1}(n+1)\,!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Etant donné que $0 < \theta < 1$, $2 < e < 3$, alors $R_n < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)\,!}$. Mais $e^{1/2} < 2$ d'où vient que $R_n < \frac{1}{2^n(n+1)\,!}$. On demande de calculer la valeur de n de façon que l'inégalité $R_n < 0{,}0001$ soit vérifiée.

Si $n = 3$, alors $R_3 < \frac{1}{8\cdot 24}$; $R_3 < \frac{1}{192}$,

Si $n = 4$, alors $R_4 < \frac{1}{16\cdot 120}$; $R_4 < \frac{1}{1920}$,

Si $n = 5$, alors $R_5 < \frac{1}{32\cdot 720}$; $R_5 < 0{,}0001$.

Pour calculer $\sqrt{e}$ à 0,0001 près, on obtient la valeur approchée

$$\sqrt{e} \cong 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} + \frac{1}{2^5 \cdot 5!}.$$

Opérons par addition après avoir transformé tous les termes d'addition en fractions décimales possédant un chiffre de réserve:

$$\begin{array}{r} 1{,}50000 \\ 0{,}12500 \\ 0{,}02083 \\ 0{,}00260 \\ \underline{0{,}00026} \\ 1{,}64869 \end{array}$$

Donc, $\sqrt{e} \cong 1{,}6487$.

856. On donne une fonction $f(x)$ continue, de même que ses dérivées jusqu'à celle d'ordre $(n-1)$ inclusivement, sur un segment $[a, b]$ et qui possède une dérivée d'ordre n dans un intervalle (a, b). Dans ces conditions, les égalités $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \ldots$ $\ldots = f(x_{n-1}) = f(b)$, où $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$ sont satisfaites. Montrer que dans l'intervalle (a, b) il existe au moins un point ξ tel que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

857. Examiner un cas particulier du problème précédent si

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$
$$a = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ b = 4.$$

Déterminer ξ.

Réponse. $\xi = 2\frac{1}{2}$.

858. Mettre la fonction $\frac{1}{x}$ sous la forme d'un polynôme du troisième degré par rapport à $x - x_0$ $(x_0 \neq 0)$.

Réponse. $\frac{1}{x_0} - \frac{x-x_0}{x_0^2} + \frac{(x-x_0)^2}{x_0^3} - \frac{(x-x_0)^3}{x_0^4} + R_3$, où $R_3 = \frac{(x-x_0)^4}{\xi^5}$ $(x_0 \gtrless \xi \lessgtr x)$.

859. En quel point de l'arc AB de la courbe $y = x^3 - 3x$ la tangente est parallèle à la corde AB si A $(0; 0)$, B $(3; 18)$?

Réponse. M $(\sqrt{3}; 0)$.

860. Calculer $\cos 41°$ à 10^{-3} près.

Réponse. 0,754.

861. Calculer $\sqrt[3]{121}$ à 10^{-3} près.

Réponse. 4,946.

Calculer à 10^{-3} près:

862. $\sqrt[3]{e}$.

Réponse. 1,395.

863. $\sqrt[7]{129}$.
Réponse. 2,002.
864. sin 36°.
Réponse. 0,587.

2. Règle de L'Hospital pour lever les indéterminations. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions dérivables au voisinage ε du point x_0 et $\varphi'(x) \neq 0$.

Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty,$$

c'est-à-dire que le quotient présente au point $x = x_0$ une indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

à condition qu'il existe une limite du rapport des dérivées.

Si le quotient $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ au point $x = x_0$ présente lui aussi une indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ et que les dérivées $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ satisfont aux conditions correspondantes, il convient alors de passer au rapport des dérivées secondes, etc.

Dans le cas d'une indétermination du type $0 \cdot \infty$ ou $\infty - \infty$, il y a lieu de transformer algébriquement la fonction donnée de manière à la ramener à une indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ et d'appliquer ensuite la règle de L'Hospital.

Les indéterminations des types 0^0, ∞^0 ou 1^∞ peuvent être levées en prenant le logarithme de la fonction donnée et en calculant la limite du logarithme de cette fonction.

865. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Solution. Le numérateur et le dénominateur tendent séparément vers zéro pour $x \to 1$ d'où vient qu'on a une indétermination du type $\frac{0}{0}$. Appliquons la règle de L'Hospital, c'est-à-dire examinons la limite du rapport des dérivées des fonctions données:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \to 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

866. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{0}{0}\right)$.

Solution. On a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$,

car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Ici, la règle de L' Hospital a été appliquée deux fois.

867. Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ si n est un entier positif $\left(\text{indétermination du type } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Solution. Appliquons la règle de L'Hospital n fois:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} =$$

$$= \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{e^x} = 0.$$

868. Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{x+e^x}$ $\left(\text{indétermination du type } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Solution. On a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{x+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{1/2}{1/2e^{x/2}} = 0.$$

869. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 \cdot \ln x)$.

Solution. Ici, nous avons une indétermination du type $0\cdot\infty$. Mettons le produit de fonctions sous la forme d'un quotient et, ensuite, ayant obtenu une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$, appliquons la règle de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} (x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

870. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$.

Solution. Dans cet exemple, nous avons une indétermination du type $\infty - \infty$. Dans ces conditions, pour trouver la limite de cette fonction, réduisons les fractions au même dénominateur et, ensuite, après avoir obtenu une indétermination du type $\frac{0}{0}$, appliquons la règle de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x(2+x)} = \frac{1}{2}.$$

871. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$.

Solution. C'est une indétermination du type 0^0. Désignons la fonction donnée par y, c'est-à-dire $y = (\sin x)^x$ et prenons le

logarithme de cette fonction :

$$\ln y = x \cdot \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}.$$

Calculons la limite du logarithme de la fonction donnée en appliquant la règle de L'Hospital (ici, a lieu une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$) :

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \left(x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

872. Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$ (indétermination du type ∞^0).

S o l u t i o n. Posons $(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = y$ et prenons le logarithme :

$$\ln y = 2 \cdot \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \frac{2 \ln \operatorname{tg} x}{1/\cos x}.$$

En appliquant la règle de L'Hospital, on obtient

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = 2 \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sec x} = 2 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x}{\sec x \cdot \operatorname{tg} x} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x \cdot \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 - 1.$$

873. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\ln x}$ (indétermination du type 1^∞).

S o l u t i o n. En prenant le logarithme et en appliquant la règle de L'Hospital, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln x \cdot \ln (1 + x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+x)}{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x \ln^2 x}{x+1} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

Calculer les limites des fonctions suivantes:

1) Pour une indétermination du type $\frac{0}{0}$.

874. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.

Réponse. $\frac{3}{5}$.

875. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Réponse. 2.

876. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arc\,tg} x}{e^{3/x}-1}$.

Réponse. $\frac{2}{3}$.

877. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-(e^x+e^{-x})\cdot\cos x}{x^4}$.

Réponse. $\frac{1}{3}$.

878. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

Réponse. 0,18.

879. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3xe^x+3x^2}{\operatorname{arctg} x-\sin x-\frac{x^3}{6}}$.

Réponse. 18.

2) Pour une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$.

880. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

Réponse. 1.

881. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$.

Réponse. 0.

882. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

Réponse. $\dfrac{1}{2}$.

883. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

Réponse. ∞.

884. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Réponse. 0.

3) Pour une indétermination du type $0\cdot\infty$.

885. $\lim\limits_{x\to 0} (x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$.

Réponse. $\dfrac{1}{\pi}$.

886. $\lim\limits_{x\to 1} (\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x)$.

Réponse. 1.

887. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg} x$.

Réponse. 0.

4) Pour une indétermination du type $\infty-\infty$.

888. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Réponse. $-\dfrac{1}{2}$.

889. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{p}{1-x^p}-\dfrac{q}{1-x^q}\right]$.

Réponse. $\dfrac{p-q}{2}$.

890. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

Réponse. $\dfrac{2}{3}$.

5) Pour des indéterminations des types 0^0, ∞^0, 1^∞.

891. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)^{\cos x}$.

Réponse. 1.

892. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$.

Réponse. e^{-6}.

893. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Réponse. 2.

894. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Réponse. $e^{1/3}$.

3. Croissance et décroissance d'une fonction. Extrémum d'une fonction

On dit qu'une fonction $f(x)$ est *croissante au point* x_0 si, pour $h>0$ suffisamment petit, la condition

$$f(x_0-h)<f(x_0)<f(x_0+h)$$

est satisfaite (fig. 28).

On dit qu'une fonction $f(x)$ est *décroissante au point* x_0 si, pour $h>0$ suffisamment petit, la condition

$$f(x_0-h)>f(x_0)>f(x_0+h)$$

est satisfaite (fig. 29).

Une fonction $f(x)$ est *croissante dans l'intervalle* (a, b) si la condition $x_1<x_2$ entraîne $f(x_1)<f(x_2)$ et cela quel que soit le couple de points x_1 et x_2 de cet intervalle.

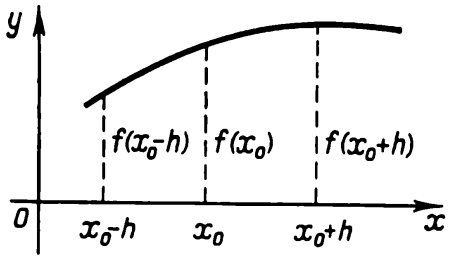


Fig. 28

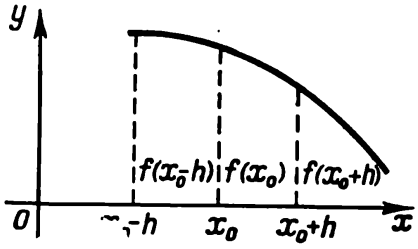


Fig. 29

Une fonction $f(x)$ est *décroissante dans l'intervalle* (a, b) si la condition $x_1<x_2$ entraîne $f(x_1)>f(x_2)$ et cela quel que soit le couple de points x_1 et x_2 dans cet intervalle.

Critères de croissance et de décroissance d'une fonction.

1) *Si* $f'(x_0)>0$, *alors la fonction* $f(x)$ *croît au point* x_0.

2) *Si* $f'(x_0)<0$, *alors la fonction* $f(x)$ *décroît au point* x_0.

On dit que la valeur de $f(x_0)$ est le *maximum* de la fonction $f(x)$ si, pour $h>0$ suffisamment petit, les conditions

$$f(x_0-h)<f(x_0) \quad \text{et} \quad f(x_0+h)<f(x_0)$$

sont satisfaites.

Le point x_0 est appelé, dans ce cas, *point de maximum* de la fonction $f(x)$ (fig. 30).

On dit que la valeur de $f(x_0)$ est le *minimum* de la fonction $f(x)$ si, pour $h>0$ suffisamment petit, les conditions

$$f(x_0-h)>f(x_0) \quad \text{et} \quad f(x_0+h)>f(x_0)$$

sont satisfaites.

Le point x_0 est appelé, dans ce cas, *point de minimum* de la fonction $f(x)$ (fig. 31).

Le maximum ou le minimum d'une fonction est appelé *extrémum* de la fonction. Le point de maximum ou de minimum d'une fonction s'appelle *point d'extrémum* de cette fonction.

Condition nécessaire d'existence d'un extrémum. *Si la fonction $f(x)$ possède un extrémum au point x_0, alors sa dérivée $f'(x_0)$ s'annule ou n'existe pas.*

Le point x_0 en lequel $f'(x_0) = 0$ est appelé *point stationnaire*. Les points en lesquels $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ n'existe pas sont appelés *points critiques*. Tout point critique n'est pas nécessairement un point d'extrémum.

Conditions suffisantes d'existence d'un extrémum.

Règle 1. *Si x_0 est un point critique de la fonction $f(x)$ et, pour une valeur arbitraire suffisamment petite de $h > 0$, $f'(x_0 - h) > 0$, $f'(x_0 + h) < 0$,*

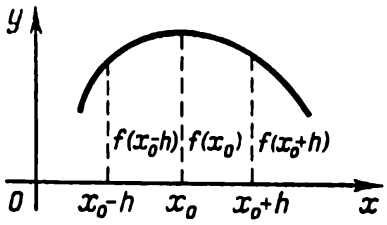


Fig. 30

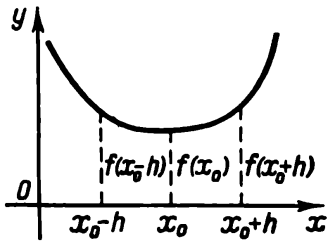


Fig. 31

alors la fonction $f(x)$ possède un maximum au point x_0; mais si $f'(x_0 - h) < 0$, $f'(x_0 + h) > 0$, alors c'est un minimum que la fonction $f(x)$ possède au point x_0.

Si $f'(x_0 - h)$ et $f'(x_0 + h)$ sont de mêmes signes, alors la fonction $f(x)$ n'a pas d'extrémum au point x_0.

Règle 2. *Si $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, alors la fonction $f(x)$ possède au point x_0 un extrémum, à savoir un maximum si $f''(x_0) < 0$, et un minimum si $f''(x_0) > 0$.*

Règle 3. *Soient $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, ..., $f^{n-1}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dans ce cas, la fonction $f(x)$ possède au point x_0 un extrémum si n est un nombre pair, à savoir un maximum pour $f^{(n)}(x_0) < 0$, et un minimum pour $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

Si n est un nombre impair, alors la fonction $f(x)$ n'a pas d'extrémum au point x_0.

Pour déterminer la plus grande (la plus petite) valeur de la fonction $f(x)$ dans un segment $[a, b]$, il faut choisir la plus grande (la plus petite) parmi les valeurs que cette fonction prend aux extrémités du segment considéré et aux points critiques appartenant à ce segment.

895. On donne la fonction $y = x^3 - 3x^2$ et on donne les points $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 0{,}5$. En quels points parmi les points cités la fonction est-elle croissante? La fonction donnée est-elle décroissante?

Solution. Calculons la dérivée $y' = 3x^2 - 6x$.

Pour $x = 3$ $y' = 9 > 0$, la fonction est croissante.

Pour $x = 1$ $y' = -3 < 0$, la fonction est décroissante.

Pour $x = -1$ $y' = 9 > 0$, la fonction est croissante.

Pour $x = 0{,}5$ $y' = -2{,}25 < 0$, la fonction est décroissante.

896. Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $y = x(1 + \sqrt{x})$.

S o l u t i o n. Calculons la dérivée $y' = 1 + \frac{3}{2}x^{1/2}$. La derivée est positive sur le segment $[0, +\infty]$. Ainsi, la fonction est croissante dans tout le domaine de définition.

897. Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $y = \frac{1}{2}x - \sin x$ si $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

S o l u t i o n. Calculons la dérivée $y' = \frac{1}{2} - \cos x$. Dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ $y' > 0$, d'où vient que la fonction est croissante, alors que dans les intervalles $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ $y' < 0$ et la fonction est décroissante.

898. Chercher les extrémums de la fonction

$$y = (x - 5)\cdot e^x.$$

S o l u t i o n. Calculons la dérivée première $y' = (x - 4)\,e^x$. En l'égalant à zéro, on trouve le point stationnaire : $e^x\,(x - 4) = 0$, $x = 4$; $y'\,(4 - h) = -h\cdot e^{4-h} < 0$, $y'\,(4 + h) = h\cdot e^{4+h} > 0$.

En s'appuyant sur la règle 1, on conclut qu'au point $x = 4$ la fonction a un minimum : $y_{\min} = -e^4$.

899. Chercher les extrémums de la fonction

$$y = x\cdot\sqrt{1 - x^2}.$$

S o l u t i o n. La fonction est définie pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Calculons la dérivée première

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}};$$

$y' = 0$ pour $1 - 2x^2 = 0$; d'où l'on tire $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (points stationnaires); y' n'existe pas ($y' = \infty$) pour $x = \pm 1$, c'est-à-dire aux frontières du domaine de définition de la fonction.

Calculons la dérivée seconde :

$$y'' = \frac{x\,(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Calculons les valeurs de la dérivée seconde aux points stationnaires. Pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1\,(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

Par conséquent, en opérant selon la règle 2, il vient qu'au point $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ la fonction présente un maximum $y_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=$ $=\frac{1}{2}$. Pour $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient

$$y''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1-3}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}>0,$$

c'est-à-dire au point $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ la fonction possède un minimum $y_{\min}=-\frac{1}{2}$.

Aux points critiques $x=\pm 1$, il n'existe pas d'extrémum car, selon la définition, les points d'extrémum ne peuvent être représentés que par les points intérieurs du domaine de définition d'une fonction.

900. Chercher les extrémums de la fonction $y=(x-1)^4$.

Solution. Trouvons la dérivée première $y'=4(x-1)^3$ et les points stationnaires: $(x-1)^3=0$; $x_1=x_2=x_3=1$. La dérivée seconde $y''=12(x-1)^2$ pour $x=1$ est égale à zéro. La dérivée troisième $y'''=24(x-1)$ s'annule elle aussi pour $x=1$. La dérivée quatrième $y^{\mathrm{IV}}=24>0$. Par conséquent, selon la règle 3, il vient qu'au point $x=1$ la fonction a un minimum $y_{\min}=0$.

901. Chercher les extrémums de la fonction

$$y=1-(x-2)^{\frac{4}{5}}.$$

Solution. Calculons $y'=-\frac{4}{5}(x-2)^{-\frac{1}{5}}=-\frac{4}{5\cdot\sqrt[5]{x-2}}$. La dérivée ne s'annule pas quelles que soient les valeurs de x et n'existe que pour $x=2$ (point critique).

Vu que, pour $h>0$ suffisamment petit, les inégalités $y'(2-h)>$ >0 et $y'(2+h)<0$ sont vérifiées, alors selon la règle 1, on conclut que pour $x=2$ la fonction présente un maximum $y_{\max}=1$.

902. Chercher les extrémums de la fonction

$$y=(x-2)^{2/3}\cdot(2x+1).$$

Solution. Calculons $y'=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}$. Les points critiques sont $x=1$ (la dérivée est égale à zéro) et $x=2$ (la dérivée n'existe pas). Pour $h>0$ suffisamment petit, les iné-

galités

$$y'(1-h)>0, \quad y'(1+h)<0,$$
$$y'(2-h)<0, \quad y'(2+h)>0$$

sont vérifiées. Par conséquent, au point $x=1$ la fonction a un maximum $y_{\max}=3$, et au point $x=2$, un minimum $y_{\min}=0$.

903. Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la fonction $f(x)=3x-x^3$ sur le segment $[-2, 3]$.

Solution. Trouvons la dérivée première $f'(x)=3-3x^2$ et les points stationnaires: $3-3x^2=0$, c'est-à-dire $x=\pm 1$. Trouvons les valeurs de la fonction aux points stationnaires:

$$f(1)=2, \quad f(-1)=-2.$$

Calculons les valeurs de la fonction donnée aux extrémités de l'intervalle:

$$f(-2)=2, \quad f(3)=-18.$$

Des quatre valeurs obtenues, on choisit la plus grande et la plus petite.

Ainsi, la plus grande valeur de la fonction dans l'intervalle considéré est égale à 2, alors que la plus petite l'est à -18.

904. Parmi les cylindres d'aire totale S donnée, déterminer celui dont le volume est maximum.

Solution. Soit x le rayon de la base du cylindre et y sa hauteur. Alors $S=2\pi x^2+2\pi xy$, c'est-à-dire $y=\frac{S-2\pi x^2}{2\pi x}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x}-2\pi x\right)$. Par conséquent, le volume du cylindre exprimé en fonction de x s'écrira:

$$V=\pi x^2\cdot\frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x}-2\pi x\right)=\frac{S}{2}x-\pi x^3.$$

Le problème se ramène à chercher le maximum de la fonction $V=\frac{S}{2}x-\pi x^3$ pour $x>0$.

Calculons la dérivée $\frac{dV}{dx}=\frac{S}{2}-3\pi x^2$ et l'égalons à zéro: $\frac{S}{2}-3\pi x^2=0$, d'où $x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Calculons la dérivée du deuxième ordre $\frac{d^2V}{dx^2}=-6\pi x$. Vu que, pour $x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, la condition $\frac{d^2V}{dx^2}<0$ est vérifiée, le volume du cylindre sera maximum et

$$y=\frac{S-2\pi\frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=2x,$$

c'est-à-dire que la section axiale du cylindre doit être un carré.

Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance des fonctions :

905. $y = 2 - 3x + x^3$.

Réponse. Dans les intervalles $(-\infty, -1)$ et $(1, +\infty)$ la fonction est croissante ; dans l'intervalle $(-1, 1)$ elle est décroissante.

906. $y = (x^2 - 1)^{3/2}$.

Réponse. Pour $x > 1$, la fonction est croissante ; pour $x < -1$, la fonction est décroissante.

907. $y = xe^{-x}$.

Réponse. Pour $x > 1$, la fonction est décroissante ; pour $x < 1$ la fonction est croissante.

908. $y = (2 - x)(x + 1)^2$.

Réponse. Pour $|x| > 1$ la fonction est décroissante ; pour $|x| < 1$ la fonction est croissante.

Trouver les extrémums des fonctions suivantes :

909. $y = x^2(1 - x\sqrt{x})$.

Réponse. $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y\left(2\sqrt[3]{\frac{2}{49}}\right) = \frac{12}{49}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$.

910. $y = x + \sqrt{3 - x}$.

Réponse. $y_{\max} = y\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{13}{4}$.

911. $y = \ln(x^2 + 1)$.

Réponse. $y_{\min} = y(0) = 0$.

912. $y = \operatorname{ch}^2 x$.

Réponse. $y_{\min} = y(0) = 1$.

913. $y = \frac{x}{\ln x}$.

Réponse. $y_{\min} = y(e) = e$.

914. $y = xe^{-x^2/2}$.

Réponse. $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$.

915. $y = (x - 1)^{6/7}$.

Réponse. $y_{\min} = y(1) = 0$.

916. $y = (2x - 1)\sqrt[3]{(x - 3)^2}$.

Réponse. $y_{\min} = y(3) = 0$, $y_{\max} = y(2) = 3$.

917. $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$.

Réponse. $y_{\min} = y(1) = -1$.

918. $y = \frac{x}{2} - \sin^2 x$.

Réponse. $y_{\max} = \frac{\pi - 12 + 6\sqrt{3}}{24}$, $y_{\min} = \frac{5\pi - 12 - 6\sqrt{3}}{24}$.

919. $y = e^{\frac{2}{3}\sin x}$.

Réponse. $y_{\max} = e^{2/3}$, $y_{\min} = e^{-2/3}$.

920. Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la fonction $y = x^4 - 2x^2 + 3$ dans le segment $[-3, 2]$.

Réponse. La plus petite valeur est égale à 2, la plus grande l'est à 66.

921. Déterminer sur l'axe Oy un point à partir duquel le segment AB est vu sous un angle maximum si A (2, 0), B (8, 0).

Réponse. $(0, \pm 4)$.

922. Soit B un point se trouvant à une distance de 60 km du chemin de fer. La distance (suivant le chemin de fer) entre le point A et le point C le plus proche du point B est de 285 km. A quelle distance du point C faut-il construire une gare pour dépenser le minimum de temps sur le trajet entre les points A et B si la vitesse de mouvement par chemin de fer est de 52 km/h et celle par autoroute est de 20 km/h?

Réponse. $x = 25$ km, $t = 8$ h 15 mn.

923. Trouver les côtés d'un rectangle d'aire maximum qui peut être inscrit dans l'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Réponse. $5\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$.

924. Un fil de fer de longueur l a reçu la forme d'un rectangle. Quelles sont les dimensions de ce rectangle si son aire est maximum?

Réponse. $\frac{1}{4}l$, $\frac{1}{4}l$.

925. Déterminer le volume maximum d'un cône dont on donne la génératrice l.

Réponse. $V = \frac{2\pi l^3 \sqrt{3}}{27}$.

926. Déterminer le volume maximum d'un cylindre d'aire totale S.

Réponse. $V = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

927. Un touriste doit relier le point A se trouvant sur une autoroute au point B situé à 8 km de cette autoroute. La distance entre A et B (en ligne droite) est de 17 km. On demande en quel point doit quitter l'autoroute le touriste pour qu'il gagne, dans le plus bref délai, le point B si la vitesse de son déplacement par autoroute est de 5 km/h et celle en l'absence de route est de 3 km/h?

Réponse. A une distance de 9 km du point A.

928. Un canal de 27 m de large se jette sous un angle droit dans un autre canal d'une largeur de 64 m. Quelle est la longueur maximum des grumes pouvant s'adapter pour flottaison à ce système de canaux?

Réponse. 125 m.

929. A quelle hauteur au-dessus du centre d'une table ronde de rayon a doit-on placer une lampe électrique pour que l'éclairement du bord de table soit maximum?

Indication. L'intensité d'éclairement s'exprime par la formule $I = \frac{k \cdot \sin \varphi}{r^2}$, où φ est l'angle d'incidence du rayon lumineux, r la distance entre la source de lumière et l'aire à éclairer, k la puissance de la source de lumière.

Réponse. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

4. Concavité, convexité. Points d'inflexion. On dit que la courbe représentative d'une fonction $y = f(x)$ a sa *convexité tournée vers le haut* dans un intervalle (a, b) si cette courbe est située au-dessous de la tangente menée en tout point de cet intervalle (fig. 32).

Fig. 32

On dit que la courbe représentative d'une fonction $y = f(x)$ a sa *concavité tournée vers le haut* dans un intervalle (a, b) si cette courbe est située au-dessus de la tangente menée en tout point de cet intervalle (fig. 33).

Condition suffisante de convexité (de concavité) de la courbe représentative d'une fonction.

Fig. 33

Fig. 34

Si $f''(x) < 0$ dans l'intervalle (a, b), on dit que la courbe représentative de la fonction est convexe dans cet intervalle; si toutefois $f''(x) > 0$, on dit que dans l'intervalle (a, b) la courbe représentative de la fonction est concave.

Un point $(x_0; f(x_0))$ de la courbe représentative de la fonction en lequel la convexité passe à la concavité s'appelle *point d'inflexion* (fig. 34).

Pour l'abscisse x_0 du point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$, la dérivée seconde s'annule ($f''(x_0) = 0$) ou n'existe pas. Les points en lesquels $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ n'existe pas sont appelés *points critiques de seconde espèce.*

Si x_0 est un point critique de seconde espèce et que, pour $h > 0$ suffisamment petit quelconque, les inégalités $f''(x_0 - h) < 0$, $f''(x_0 + h) > 0$ (tout comme les inégalités $f''(x_0 - h) > 0$, $f''(x_0 + h) < 0$) sont vérifiées, alors le point d'abscisse x_0 de la courbe $y = f(x)$ est un point d'inflexion.

Si toutefois $f''(x_0 - h)$ et $f''(x_0 + h)$ sont de mêmes signes, alors le point d'abscisse x_0 de la courbe $y = f(x)$ n'est pas un point d'inflexion.

930. Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de la courbe représentative de la fonction $y = x^5 + 5x - 6$.

Solution. On a $y' = 5x^4 + 5$, $y'' = 20x^3$.

Si $x < 0$, alors $y'' < 0$ et la courbe est donc convexe.

Si $x > 0$, alors $y'' > 0$ et la courbe est donc concave.

Ainsi, la courbe est convexe dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ et concave dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

931. Trouver les extrémums et le point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction $y = (x + 1)^2 (x - 2)$.

Solution. Calculons la dérivée première $y' = 3(x^2 - 1)$. Les racines de la dérivée première : $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Calculons la dérivée seconde $y'' = 6x$. Trouvons les valeurs de la dérivée seconde aux points stationnaires :

$$y''(-1) = -6 < 0, \qquad y_{\max} = 0;$$
$$y''(1) = 6 > 0, \qquad y_{\min} = -4.$$

Trouvons le point d'inflexion en égalant à cet effet à zéro la dérivée seconde : $6x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. A gauche du point $x = 0$, $y''(0 - h) < 0$ et la courbe est donc convexe, alors qu'à droite du point $x = 0$, $y''(0 + h) > 0$ et la courbe est donc concave ; par conséquent, le point d'abscisse $x = 0$ est le point d'inflexion ; $y_{\text{p.inf}} = -2$.

932. Trouver les points d'inflexion de la courbe $y = (x - 5)^{5/3} + 2$.

Solution. On a

$$y' = \frac{5}{3}(x-5)^{2/3}, \quad y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

La dérivée seconde ne s'égale pas à zéro quelles que soient les valeurs de x et n'existe pas au point $x = 5$. La valeur de $x = 5$ est l'abscisse du point d'inflexion, car $y''(5 - h) < 0$, $y''(5 + h) > 0$.

Par conséquent, $P(5; 2)$ est le point d'inflexion.

933. Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de la courbe $y = xe^x$.

Réponse. Dans l'intervalle $(-\infty, -2)$, la courbe est convexe, alors que dans l'intervalle $(-2, +\infty)$ elle est concave.

934. Trouver les points d'inflexion de la courbe $y = (x - 4)^5 + 4x + 4$.

Réponse. $P(4; 20)$.

935. Trouver les points d'inflexion de la courbe

$$y = (x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}.$$

Réponse. $P(1; 0)$.

936. Trouver les points d'inflexion de la courbe $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

Réponse. La courbe n'a pas de points d'inflexion.

5. **Asymptotes.** Une droite L est *asymptote* à une courbe $y = f(x)$ si la distance d'un point $M(x; y)$ de cette courbe à la droite L tend vers zéro, lorsque le point indiqué s'éloigne indéfiniment sur la courbe par rapport à l'origine des coordonnées (c'est-à-dire lorsqu'au moins l'une des coordonnées du point considéré tend vers l'infini).

On dit que la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* de la courbe $y = f(x)$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

On dit que la droite $y = b$ est une *asymptote horizontale* de la courbe $y = f(x)$ lorsqu'il existe une limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

On dit que la droite $y = kx + b$ est une *asymptote oblique* de la courbe $y = f(x)$ lorsqu'il existe les limites suivantes:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]$$

ou

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx].$$

937. Déterminer les asymptotes de la courbe $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

Solution. La fonction est définie dans les intervalles $(-\infty, 0)$ et $(2, +\infty)$. Vu que $\lim\limits_{x\to 2+0} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$, la droite $x = 2$ est l'asymptote verticale de la courbe considérée.

La courbe n'a pas d'asymptotes horizontales, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$ ne sont pas des valeurs finies. Voyons s'il existe des asymptotes obliques:

$$1)\ k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1.$$

Par conséquent, il existe une asymptote oblique à droite $y = x + 1$;

$$2)\ k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{-1}$$

(on a divisé le numérateur et le dénominateur par une quantité négative $-x$), c'est-à-dire

$$k_2 = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = -1,$$

$$b_2 = -\lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_2 x] = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x(\sqrt{-x} - \sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x})} = -1.$$

Il existe donc une asymptote oblique à gauche $y = -x - 1$ (fig. 35).

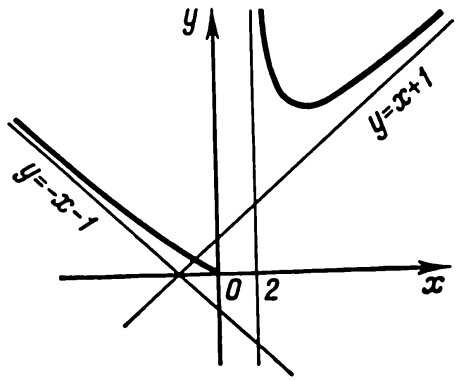


Fig. 35

938. Déterminer les asymptotes de la courbe $y = x + 2 \operatorname{arctg} x$.

S o l u t i o n. On voit facilement que la courbe n'a pas d'asymptotes verticales ni horizontales. Cherchons les asymptotes obliques:

$$1)\ k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (x + 2\operatorname{arctg} x - x) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi;$$

$y = x + \pi$ est l'asymptote oblique à droite;

2) $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x + 2 \operatorname{arctg} x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1,$

$b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2 \operatorname{arctg} x - x) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi;$

$y = x - \pi$ est l'asymptote oblique à gauche.

939. Déterminer les asymptotes de la courbe $y = x^2 e^{-x}$.

S o l u t i o n. Il est évident que les asymptotes verticales n'existent pas. Si $x \to \infty$, alors $y \to 0$. Par conséquent, l'axe Ox est une asymptote horizontale de la courbe donnée. Voyons s'il existe une asymptote oblique:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Ainsi, il n'existe que l'asymptote horizontale $y = 0$.

940. Déterminer les asymptotes de la courbe $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

S o l u t i o n. Si $x \to -2$, alors $y \to \infty$. L'asymptote verticale $x = -2$. Trouvons des asymptotes non verticales:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x\right] = -4.$$

Ainsi, l'asymptote non verticale est régie par l'équation $y = x - 4$.

941. Déterminer les asymptotes de la courbe $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$.

Réponse. $x = 0$; $y = 2x$.

942. Déterminer les asymptotes de la courbe $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$.

Réponse. $x = 0$; $y = -3x$.

943. Déterminer les asymptotes de la courbe $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

Réponse. $y = x - 6$.

944. Déterminer les asymptotes de la courbe $y = \frac{1}{2} x + \operatorname{arctg} x$.

Réponse. $y = \frac{1}{2} x + \pi$ et $y = \frac{1}{2} x$.

945. Déterminer les asymptotes de la courbe $y = -x \cdot \operatorname{arctg} x$.

Réponse. $y = \frac{\pi}{2} x + 1$ et $y = -\frac{\pi}{2} x + 1$.

6. Construction des courbes représentatives des fonctions d'après les points caractéristiques. En construisant la courbe représentative d'une fonction $y = f(x)$, il est bon d'étudier ses caractéristiques. Pour ce faire, il faut:

1) déterminer le domaine de définition de la fonction;
2) discuter la parité de la fonction;
3) discuter la continuité de la fonction; trouver les points de discontinuité (s'il y en a) et établir la nature de la discontinuité;
4) trouver les points d'intersection de la courbe représentative de la fonction avec les axes de coordonnées;
5) déterminer les asymptotes de la courbe représentative de la fonction;
6) chercher les extrémums de la fonction, déterminer les intervalles de croissance et de décroissance;
7) trouver les points d'inflexion de la courbe et les intervalles de convexité et de concavité.

946. Construire la courbe représentative de la fonction $y = \frac{x^3+4}{x^2}$.

Solution. a) Le domaine de définition de la fonction occupe l'axe Ox tout entier, excepté le point $x = 0$.

b) Le point de discontinuité est $x = 0$, le plus, $\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$; par conséquent, $x = 0$ (axe Oy) est une asymptote verticale à la courbe représentative.

c) Déterminons les asymptotes obliques:

$$k = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

L'asymptote oblique est régie par l'équation $y = x$.

d) La fonction n'est ni paire ni impaire. Déterminons les points d'intersection de la courbe représentative avec l'axe Ox:

$$\frac{x^3+4}{x^2} = 0; \quad x = -\sqrt[3]{4}.$$

e) Cherchons les extrémums de la fonction et les intervalles de croissance et de décroissance:

$$y' = 1 - \frac{8}{x^3};$$

$y' = 0$ pour $x = 2$; $y' = \infty$ pour $x = 0$ (point de discontinuité de la fonction);

$$y'' = \frac{24}{x^4};$$

$y''(2) > 0$, par conséquent, $x = 2$ est un point de minimum; $y_{\min} = 3$. Si $x < 0$ alors $y' > 0$ et la fonction est donc croissante.

f) Déterminons les points d'inflexion et les intervalles de convexité et de concavité:

$y'' \neq 0$; $y'' = \infty$ pour $x = 0$ (point de discontinuité de la fonction).

Les points critiques de seconde espèce n'existent pas; par conséquent, les points d'inflexion n'existent pas non plus. La courbe représentative de la fonction est concave partout, car $y'' > 0$ (fig. 36).

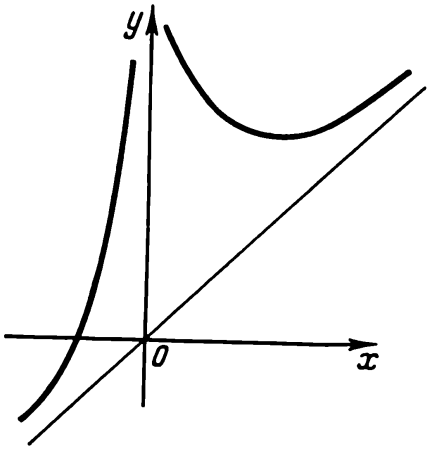


Fig. 36

947. Construire la courbe représentative de la fonction $y\sqrt[3]{1-x^3}$.

Solution. a) Le domaine de définition occupe tout l'axe Ox.

b) Les points de discontinuité n'existent pas. Les asymptotes verticales n'existent pas. On a

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - x\sqrt[3]{1-x^3} + x^2} = 0;$$

l'asymptote oblique est $y = -x$.

c) La fonction n'est ni paire ni impaire. Les points d'intersection avec les axes de coordonnées sont:

$$y = 1 \text{ pour } x = 0; \quad x = 1 \text{ pour } y = 0.$$

d) $y' = -\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$;

$$y' = 0 \text{ pour } x = 0; \quad y' = \infty \text{ pour } x = 1.$$

Au voisinage des points critiques la dérivée ne change pas de signe, donc il n'y a pas d'extrémums. Pour tous les $x \neq 0$ $y' < 0$ la fonction décroît de façon monotone.

e) $y'' = -\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$;

$y'' = 0$ pour $x = 0$; $y'' = \infty$ pour $x = 1$;

$y''(-h) > 0$; $y''(+h) < 0$, $y''(1-h) < 0$; $y''(1+h) > 0$.

Par conséquent, $x = 0$ et $x = 1$ sont les abscisses des points d'inflexion; $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$ sont les intervalles de concavité: $(0, 1)$ est l'intervalle de convexité (fig. 37).

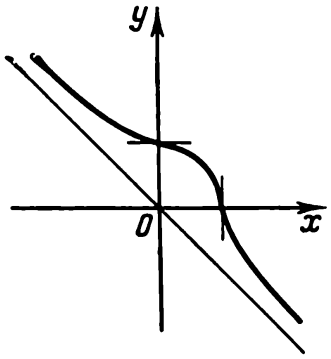


Fig. 37

Construire les courbes représentatives des fonctions:

948. $y = \sin^2 x$.

Réponse. $y_{\min} = y(\pi k) = 0$, $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$ (k est un entier quelconque). Il n'y a pas de points d'inflexion.

949. $y = 3\sqrt[3]{x} - x$.

Réponse. $y_{\min} = y(-1) = -2$, $y_{\max} = y(1) = 2$, $y_{\text{p. inf.}} = y(0) = 0$.

950. $y = \ln x - \ln(x-1)$.

Réponse. La fonction définie dans l'intervalle $(1, +\infty)$ est décroissante. La courbe représentative de la fonction est concave. Les asymptotes sont $x = 1$, $y = 0$. Les extrémums et les points d'inflexion n'existent pas.

951. $y = \ln \frac{x}{x-1}$.

Réponse. La fonction est définie dans les intervalles $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$. Dans l'intervalle $(-\infty, 0)$, la fonction est décroissante, sa courbe représentative étant convexe. Dans l'intervalle $(1, +\infty)$ la fonction est décroissante, sa courbe représentative étant concave. Les asymptotes sont $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Les extrémums et les points d'inflexion n'existent pas (cf. problème précédent).

952. $y = \frac{x^3}{x^2-4}$.

Réponse. Les asymptotes sont $x = \pm 2$, $y = x$. La fonction est impaire. Sa courbe représentative passe par l'origine des coordonnées. Dans l'intervalle $(-2, 2)$ la fonction décroît de façon monotone. Les extrémums sont :

$$y_{\min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}, \quad y_{\max} = y(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3},$$

le point d'inflexion est $(0, 0)$. Dans les intervalles $(-\infty, -2)$ et $(0, 2)$ la courbe représentative de la fonction est convexe ; dans les intervalles $(-2, 0)$ et $(2, +\infty)$ la courbe est concave.

953. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Réponse. $y_{\max} = y(e^2) = \frac{2}{e}$. Il y a une asymptote $y = 0$.

954. $y = 16x(x-1)^3$.

Réponse. $y_{\min} = y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{16}$, $y_{\text{p. inf.}} = y(1) = 0$, $y_{\text{p. inf.}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = -1$. Il n'y a pas d'asymptotes.

955. $y = (x-1)\sqrt{x}$.

Réponse. $y_{\min} = y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

956. $y = x + e^{-x}$.

Réponse. $y_{\min} = y(0) = 1$. Il y a une asymptote $y = x$.

957. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Réponse. La fonction croît de façon monotone ; $y_{\text{p. inf.}} = y(0) = 0$.

958. $y = e^{2x - x^2}$.

Réponse. $y_{\max} = y(1) = e$. Les points d'inflexion existent pour $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$. L'asymptote est $y = 0$.

959. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$.

Réponse. $y_{\min} = y(6) = 13{,}5$; le point d'inflexion est $O(0\,;\,0)$. Les asymptotes sont $x = 2$ et $y = x + 4$.

§ 3. Courbure d'une courbe plane

On appelle *angle de contingence* de l'arc AB d'une courbe plane l'angle φ formé par les tangentes menées aux points A et B de la courbe (fig. 38). Le rapport de l'angle de contingence à la longueur s de l'arc AB s'appelle *courbure moyenne* de l'arc AB :

$$k_{\text{moy}} = \frac{\varphi}{s}.$$

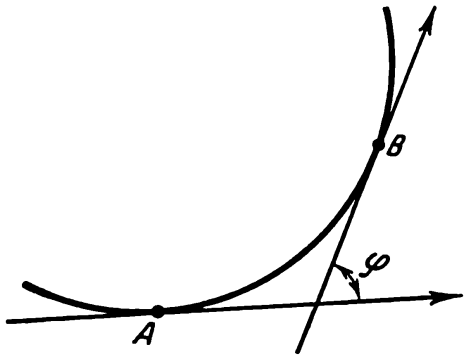


Fig. 38

On appelle *courbure* k en un point A d'une courbe la limite de la courbure moyenne qu'admet l'arc AB lorsque $B \to A$, c'est-à-dire

$$k = \lim_{s \to 0} \frac{\varphi}{s}.$$

La courbure d'un cercle est de la forme

$$k_c = \frac{1}{a},$$

où a est le rayon du cercle.

La courbure d'une droite est nulle.

Si la courbe est donnée par l'équation $y = f(x)$, alors sa courbure se calcule d'après la formule

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Si la courbure est donnée par des équations paramétriques $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, on a alors

$$k = \frac{|\dot{x}\dddot{y} - \dot{y}\dddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

où

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Si la courbe est donnée en coordonnées polaires par l'équation $\rho = f(\theta)$, alors

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}},$$

où

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}, \qquad \rho'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}.$$

On appelle *rayon de courbure* R l'inverse de la courbure

$$R = \frac{1}{|k|}.$$

On appelle *cercle de courbure* au point A d'une courbe la position limite du cercle mené par trois points A, B, C de la courbe, lorsque $B \to A$ et $C \to A$.

Le rayon du cercle de courbure est égal au rayon de courbure. Le centre du cercle de courbure est appelé *centre de courbure* et se trouve sur la normale menée à cette courbe au point A et dirigée dans le sens de la concavité de la courbe.

Les coordonnées ξ et η du centre de courbure d'une courbe $y = f(x)$ sont données par les formules

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y}, \qquad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Le lieu géométrique de centres de courbure s'appelle *développée*. Les formules qui donnent les coordonnées du centre de courbure peuvent être considérées comme des équations paramétriques de la développée (où l'abscisse x de la courbe de départ est un paramètre).

960. Calculer la courbure de la courbe $y = -x^3$ au point d'abscisse $x = \frac{1}{2}$.

Solution. On a $y' = -3x^2$, $y'' = -6x$. Pour $x = \frac{1}{2}$, ces dérivées ont les valeurs suivantes: $y' = -\frac{3}{4}$, $y'' = -3$, d'où vient

$$k = \left| \frac{-3}{\left(1+\frac{9}{16}\right)^{3/2}} \right| = \frac{3}{125/64} = \frac{192}{125}.$$

961. Calculer la courbure en tout point de la cycloïde

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Solution. On trouve

$$\dot{x} + a(1 - \cos t), \quad \ddot{x} = a \sin t,$$

$$\dot{y} = a \sin t, \quad \ddot{y} = a \cos t,$$

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = a^2(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t) = -a^2(1 - \cos t),$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t),$$

$$k = \left| \frac{-a^2(1-\cos t)}{2^{3/2}a^3(1-\cos t)^{3/2}} \right| = \frac{1}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{1/2}}.$$

962. Calculer les coordonnées du centre de courbure de la courbe $x^3 + y^4 = 2$ au point $M(1; 1)$.

Solution. Dérivons deux fois l'équation de la courbe:

$$3x^2 + 4y^3 \cdot y' = 0 \ (1), \quad 6x + 12y^2 \cdot y'^2 + 4y^3 \cdot y'' = 0. \qquad (2)$$

Vu que $x = 1$, $y = 1$, on déduit de l'équation (1) que $y' = -3/4$, et de l'équation (2) on tire $6 + 27/4 + 4y'' = 0$, c'est-à-dire $y'' = -51/16$. On a alors

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)\,y'}{y''} = 1 - \frac{(1+9/16)(-3/4)}{-51/16} = \frac{43}{68}.$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = 1 + \frac{1+9/16}{-51/16} = \frac{26}{51},$$

c'est-à-dire $C\left(\frac{43}{68}; \frac{26}{51}\right)$.

963. Former l'équation de la développée de la parabole $y^2 = x + \frac{1}{2}$.

Solution. Dérivons deux fois l'équation de la parabole:

$$2yy' = 1, \quad y' = \frac{1}{2y};$$

$$2y'^2 + 2yy' = 0,$$

$$y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}.$$

Calculons les coordonnées du centre de courbure:

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)\cdot y'}{y''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1+\frac{1}{4y^2}\right)\cdot\frac{1}{2y}}{-\frac{1}{4y^3}} = 3y^2,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{4y^2}}{-\frac{1}{4y^3}} = y - 4y^3 - y = -4y^3.$$

On obtient l'équation de la développée donnée sous forme paramétrique

$$\begin{cases} \xi = 3y^2, \\ \eta = -4y^3. \end{cases}$$

Après avoir éliminé le paramètre y, on trouve l'équation de la développée donnée sous forme explicite: $\eta^2 = \frac{16}{27}\xi^3$.

964. Calculer le rayon de courbure de l'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ au point $M(0; 3)$.

Réponse. $R = \frac{25}{3}$.

965. Calculer le rayon de courbure en un point quelconque de la cardioïde $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$.

Réponse. $R = \frac{4}{3} a \cos\frac{\theta}{2}$.

966. Calculer la courbure de la courbe

$$\begin{cases} x = e^t \cdot \sin t, \\ y = e^t \cdot \cos t \end{cases}$$

au point $t = 1$.

Réponse. $k = \frac{1}{e\sqrt{2}}$.

967. Calculer les coordonnées du centre de courbure de la courbe $y = \frac{1}{x}$ au point $M(1; 1)$.

Réponse. $(2; 2)$.

968. Former l'équation de la développée de la courbe

$$\begin{cases} x = t \cdot \sin t + \cos t, \\ y = t \cdot \sin t - \sin t. \end{cases}$$

Réponse. C'est le cercle $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

§ 4. Ordre de tangence des courbes planes

Si les courbes $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$ possèdent un point commun $M(x_0; y_0)$, c'est-à-dire que $y_0 = f(x_0) = \varphi(x_0)$ et que les tangentes aux courbes ci-dessus menées au point $M(x_0; y_0)$ ne se confondent pas, on dit alors que les courbes $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$ *se coupent* au point M. La condition de rencontre de ces courbes au point $M(x_0; y_0)$ se présente comme suit:

$$f(x_0) = \varphi(x_0),$$
$$f'(x_0) \neq \varphi'(x_0).$$

Si toutefois les tangentes au point commun $M(x_0; y_0)$ de ces deux courbes se confondent, on dit alors que les courbes sont *tangentes* en M. La condition de tangence des courbes au point $M(x_0; y_0)$ est:

$$f(x_0) = \varphi(x_0),$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0).$$

Si enfin

$$f(x_0) = \varphi(x_0),$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0),$$
$$f''(x_0) = \varphi''(x_0),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

mais $f^{(n+1)}(x_0) \neq \varphi^{(n+1)}(x_0)$, on dit qu'au point $M(x_0; y_0)$ les courbes $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$ ont une *tangence d'ordre n*.

Si $n \geqslant 2$, alors les courbes $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$ ont une tangente commune au point $M(x_0; y_0)$ et sont de même courbure.

969. Quel est l'ordre de tangence des courbes $y = e^{-x}$ et $xy = \frac{1}{e}$ au point $x = 1$?

Solution. Soient $f(x) = e^{-x}$, $\varphi(x) = \frac{1}{ex}$. Trouvons les dérivées successives de ces fonctions $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{ex^2}$, $\varphi''(x) = \frac{2}{ex^3}$, ... Calculons ensuite les valeurs de ces fonctions et de leurs dérivées au point $x = 1$:

$$f(1) = e^{-1}, \quad f'(1) = -e^{-1}, \quad f''(1) = e^{-1};$$
$$\varphi(1) = e^{-1}, \quad \varphi'(1) = -e^{-1}, \quad \varphi''(1) = 2e^{-1}.$$

Ainsi, $f(1) = \varphi(1)$, $f'(1) = \varphi'(1)$, mais $f''(1) \neq \varphi''(1)$. Par conséquent, la tangence desdites courbes est du premier ordre.

970. Pour quelle valeur du paramètre a la courbe $y = e^{ax}$ a-t-elle au point $x = 0$ une tangence du premier ordre à la droite $y = 2x + 1$?

Solution. Soient $f(x) = e^{ax}$ et $\varphi(x) = 2x + 1$. Pour que les lignes susdites aient au point $x = 0$ une tangence du premier ordre, il est nécessaire que les égalités $f(0) = \varphi(0)$ et $f'(0) = \varphi'(0)$ soient vérifiées, c'est-à-dire que $e^{a \cdot 0} = 2 \cdot 0 + 1$ et $ae^0 = 2$. D'où l'on tire $a = 2$.

971. Quel ordre de tangence ont les courbes $y = 1 + \cos x$ et $y = 2 - x^2$ au point $x = 0$?

Réponse. Ordre 1.

972. Quel ordre de tangence à l'axe Ox a la courbe $y = \sin^2 x$ au point $x = 0$?

Réponse. Ordre 1.

973. Quel ordre de tangence a la chaînette $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ à la parabole $y = 1 + \frac{1}{2}x^2$ au point $x = 0$?

Réponse. Ordre 3.

974. Quel ordre de tangence ont les cercles $x^2 + y^2 = 2y$ et $x^2 + y^2 = 4y$ au point $x = 0$?

Réponse. Ordre 1.

975. Quel ordre de tangence a la parabole $y = x^4$ à l'axe Ox au point $x = 0$?

Réponse. Ordre 3.

976. Quel ordre de tangence a la courbe $y = \ln(1 + x)$ à la parabole $y = x - x^2$ au point $x = 0$?

Réponse. Ordre 2.

§ 5. Fonction vectorielle d'une variable scalaire et sa dérivée

Une courbe gauche peut être donnée par les équations paramétriques suivantes:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

ou par l'équation vectorielle

$$\mathbf{r} = x(t)\cdot\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} + z(t)\cdot\mathbf{k}.$$

Cette dernière équation définit le vecteur variable $\mathbf{r}$ comme une *fonction vectorielle* de la variable scalaire t:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

La courbe donnée par l'équation $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ s'appelle *hodographe* du vecteur variable $\mathbf{r}$.

La dérivée de la fonction vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ par rapport à la variable scalaire t est une nouvelle fonction vectorielle définie par l'égalité

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

La dérivée de la fonction vectorielle peut être calculée d'après la formule

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\mathbf{k}.$$

La dérivée $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ est un vecteur tangent à l'hodographe du vecteur $\mathbf{r}$ et dirigé dans le sens de croissance du paramètre t.

Si le paramètre t est le temps, $\frac{dr}{dt}$ est le vecteur vitesse de l'extrémité du vecteur $\mathbf{r}$, alors que $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ est le vecteur d'accélération.

Les principales règles de dérivation d'une fonction vectorielle d'une variable scalaire sont les suivantes:

1) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_3}{dt}$;

2) $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$, où $\mathbf{c}$ est un vecteur constant;

3) $\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\,\frac{d\lambda}{dt}$, où

$\lambda = \lambda(t)$ est une fonction scalaire de t;

4) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\cdot\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$;

5) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\times\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$.

Les *équations de la tangente* à une courbe gauche

$$\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

au point $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ s'écrivent sous la forme

$$\frac{x-x_0}{\dot{x}_0}=\frac{y-y_0}{\dot{y}_0}=\frac{z-z_0}{\dot{z}_0},$$

où

$$x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0),\ z_0=z(t_0),$$
$$\dot{x}_0=x'(t_0),\ \dot{y}_0=y'(t_0),\ \dot{z}_0=z'(t_0).$$

On appelle *plan normal* le plan passant par le point de tangence et perpendiculaire à la tangente. L'*équation du plan normal* est de la forme:

$$\dot{x}_0(x-x_0)+\dot{y}_0(y-y_0)+\dot{z}(z-z_0)=0.$$

La *différentielle de l'arc d'une courbe gauche* se calcule d'après la formule

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt.$$

977. Quelle ligne est l'hodographe de la fonction vectorielle

$$\mathbf{r}=a\mathbf{i}\cdot\cos t+a\cdot\mathbf{j}\sin t+c\mathbf{k}t?$$

Solution. Cette ligne a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x=a\cdot\cos t,\\ y=a\cdot\sin t,\\ z=ct,\end{cases}$$

qui définissent une hélice.

978. Quelle ligne est l'hodographe de la fonction vectorielle $\mathbf{r}=\mathbf{i}\cos t+\mathbf{j}+\mathbf{k}\sin t$?

Réponse. C'est le cercle $\begin{cases} x^2+z^2=1,\\ y=1.\end{cases}$

979. Quelle ligne est l'hodographe de la fonction vectorielle $\mathbf{r}=t(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$?

Réponse. C'est la droite passant par l'origine des coordonnées et formant avec les axes de coordonnées des angles égaux.

980. Quelle ligne est l'hodographe de la fonction vectorielle $\mathbf{r}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+t\mathbf{k}$?

Réponse. La droite parallèle à l'axe Oz et menée par le point $(1;1;0)$.

981. Quelle ligne est l'hodographe de la fonction vectorielle $\mathbf{r}=\mathbf{i}\operatorname{ch}t+\mathbf{k}\operatorname{sh}t$?

Réponse. Une hyperbole équilatère située dans le plan xOz.

982. Calculer la dérivée du produit scalaire des vecteurs $\mathbf{r}_1=3t\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ et $\mathbf{r}_2=2\mathbf{i}-3t\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Solution. On a

$$\frac{d(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)}{dt}=\mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}+\mathbf{r}_2\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}=(3t\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k})\cdot(-3\mathbf{j})+$$
$$+(2\mathbf{i}-3t\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot 3\mathbf{i}=-6+6=0.$$

Le résultat obtenu s'explique par le fait que le produit scalaire $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 5$, c'est-à-dire qu'il est une constante.

983. Montrer que les vecteurs $\mathbf{r} = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}$ et $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ sont perpendiculaires.

Solution. On a $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t$. Calculons le produit scalaire $\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$:

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\cos t \cdot \sin t + \sin t \cdot \cos t + 1 \cdot 0 = 0.$$

Par conséquent, $\mathbf{r} \perp \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

984. Calculer la dérivée de la fonction vectorielle

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} \operatorname{ch}^2 t + \mathbf{j} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \mathbf{k} \operatorname{sh}^2 t.$$

Réponse. $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\mathbf{i} + \mathbf{k}) \operatorname{sh} 2t + \mathbf{j} \operatorname{ch} 2t$.

985. $\mathbf{r} = \mathbf{i} \operatorname{sh} t + \mathbf{j} \operatorname{ch} t + \mathbf{k} \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 3 \operatorname{sh}^2 t}$. Trouver $\frac{d(\mathbf{r}^2)}{dt}$.

Réponse. $\frac{d(\mathbf{r}^2)}{dt} = 0$.

986. $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}t$. Trouver $\frac{d(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{dt}$.

Réponse. $\frac{d(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{dt} = 3(t^2 - 2t^5)\,\mathbf{i} + (5t^4 - 2t)\,\mathbf{j}$.

987. Former les équations de la tangente et du plan normal à la courbe

$$\begin{cases} x = a \sin^2 t, \\ y = b \sin t \cdot \cos t, \\ z = c \cos^2 t \end{cases}$$

au point $t = \frac{\pi}{4}$.

Solution. On trouve

$$\dot{x} = a \cdot \sin 2t,$$
$$\dot{y} = b \cdot \cos 2t,$$
$$\dot{z} = -c \cdot \sin 2t.$$

Pour $t = \frac{\pi}{4}$, on a :

$$x_0 = \frac{a}{2}, \quad y_0 = \frac{b}{2}, \quad z_0 = \frac{c}{2}, \quad \dot{x}_0 = a, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = -c.$$

Les équations de la tangente ont la forme :

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{y-\frac{b}{2}}{0}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c}.$$

L'équation du plan normal est de la forme :

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)-c\left(z-\frac{c}{2}\right)=0, \text{ ou } ax-cz-\frac{a^2-c^2}{2}=0.$$

988. Former les équations de la tangente et du plan normal à l'hélice $\mathbf{r}=\cos t\cdot\mathbf{i}+\sin t\cdot\mathbf{j}+\sqrt{3}t\cdot\mathbf{k}$ au point $t=\frac{\pi}{2}$.

Réponse. $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}$, $2x-2z\sqrt{3}+3\pi=0$.

989. Trouver sur la courbe

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=t^2-1, \\ z=t^3 \end{cases}$$

le point dont la tangente est parallèle au plan $x+2y+z-1=0$.

Réponse. $M_1(0;\ 0;\ -1)$ et $M_2\left(\frac{2}{3};\ -\frac{8}{9};\ -\frac{1}{27}\right)$.

990. Quel angle forme avec le plan xOy la tangente à l'hélice

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=2\sqrt{2}\,t \end{cases}$$

au point $t=\frac{\pi}{4}$?

Réponse. 70°23′.

991. Former les équations de la tangente et du plan normal à la courbe

$$\begin{cases} x=\frac{e^t\cdot\sin t}{\sqrt{2}}, \\ y=1, \\ z=\frac{e^t\cos t}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

au point $t=0$.

Réponse. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}$, $x+z-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

992. Former les équations de la tangente à la courbe

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\sin t - \cos t), \\ z = e^t \end{cases}$$

au point $t = 0$.

Réponse. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1}$.

993. Former les équations de la tangente à la courbe $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ au point $t = 1$.

Réponse. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$.

994. Démontrer que les courbes $\mathbf{r} = (u+1)\,\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + (2u-1)\mathbf{k}$ et $\mathbf{r} = 2v^2\mathbf{i} + (3v-2)\,\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$ se coupent et calculer l'angle qu'elles forment au point de leur rencontre.

Réponse. $\arccos\frac{14}{3\sqrt{29}}$.

995. Former les équations de l'hélice si le cylindre est le rayon de base $R = 4$, et si le pas d'hélice $h = 6\pi$. Calculer la différentielle de son arc.

Solution. L'hélice a pour équations

$$\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 3t, \end{cases}$$

car pour $t = 2\pi$, $z = h$.

Dérivons ces équations:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4\sin t, \\ \dot{y} = 4\cos t, \\ \dot{z} = 3. \end{cases}$$

La différentielle de l'arc sera:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9}\,dt =$$
$$= \sqrt{16(\sin^2 t + \cos^2 t) + 9}\,dt = 5\,dt.$$

996. Calculer la différentielle d'un arc de la courbe

$$\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = \sqrt{a^2+b^2}\sin t\cdot\cos t, \\ z = b\sin^2 t. \end{cases}$$

Réponse. $ds = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt$.

997. Pour quel pas h la longueur d'une spire de l'hélice

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = ct \end{cases}$$

est égale à 4π?

Indication. Faire usage du fait que lors du développement d'un cylindre dans le plan, une spire d'hélice se transforme en un segment de droite.

Réponse. $h = 2\sqrt{3}\cdot\pi$.

998. L'équation du mouvement a la forme

$$\mathbf{r} = 3\cos t\cdot\mathbf{i} + 3\sin t\cdot\mathbf{j} + 4t\cdot\mathbf{k},$$

où t est le temps. Calculer la vitesse et l'accélération du mouvement à un moment arbitraire.

Réponse. $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -3\sin t\cdot\mathbf{i} + 3\cos t\cdot\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$,

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -3\cos t\cdot\mathbf{i} - 3\sin t\cdot\mathbf{j}.$$

999. L'équation du mouvement a la forme

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

Calculer la vitesse et l'accélération du mouvement à un moment de temps égal à l'unité.

Réponse. $\mathbf{v}\,|_{t=1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$,

$$\mathbf{w}\,|_{t=1} = 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

§ 6. Trièdre attaché à une courbe gauche. Courbure et torsion

En tout point M $(x;\ y;\ z)$ d'une courbe gauche $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ on peut construire trois vecteurs unités réciproquement perpendiculaires: un vecteur unité de la *tangente* (vecteur tangent unité, fig. 39)

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|};$$

un vecteur unité de la *normale principale*

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}{\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|};$$

un vecteur unité de la *binormale*

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}.$$

Les vecteurs non unitaires correspondants peuvent être calculés d'après les formules:

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ (vecteur de la tangente)},$$

$$\mathbf{B}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \text{ (vecteur de la binormale)},$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{T} \text{ (vecteur de la normale principale)}.$$

Le plan contenant les vecteurs $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\nu}$ s'appelle plan *osculateur*.

Le plan contenant les vecteurs $\boldsymbol{\nu}$ et $\boldsymbol{\beta}$ s'appelle plan *normal*.

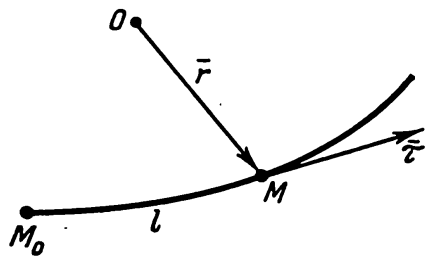


Fig. 39

Le plan contenant les vecteurs $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\tau}$ s'appelle plan *rectifiant*.

Le trièdre de sommet M formé par les plans osculateur, normal et rectifiant s'appelle *trièdre attaché* à la courbe gauche (fig. 40).

On appelle *courbure* d'une courbe au point M le nombre

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s},$$

où φ est l'angle de rotation de la tangente (angle de contingence) sur l'arc MN, Δs étant la longueur de cet arc.

Si la courbe est donnée par l'équation $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$, alors

$$K=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|.$$

Si la courbe est régie par l'équation $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, alors

$$K=\frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}.$$

On appelle *torsion* d'une courbe au point M le nombre

$$\sigma=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{\Delta s},$$

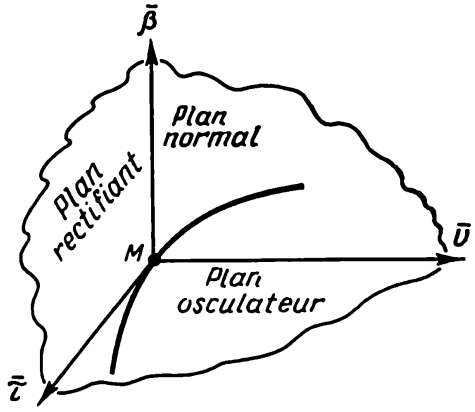


Fig. 40

où θ est l'angle de rotation de la binormale (angle de contingence de deuxième espèce) sur l'arc MN.

Si $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$, on a alors

$$\sigma=\mp\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right|,$$

où l'on prend le signe « moins » dans le cas où les vecteurs $\frac{d\beta}{ds}$ et ν ont la même orientation et le signe « plus » dans le cas contraire.

Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, on a alors

$$\sigma = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|^2}.$$

1000. Calculer le vecteur τ tangent à la courbe $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^6\mathbf{k}$ au point $t = 1$.

Solution. On a

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 6t^5\mathbf{k}, \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4t^2 + 9t^4 + 36t^{10}}.$$

Pour $t = 1$, on trouve

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7,$$

$$\tau = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

1001. Calculer le vecteur unité tangent à la courbe $\mathbf{r} = 5t\mathbf{i} + 12\mathbf{j}\cos t + 12\mathbf{k}\sin t$ en un point arbitraire.

Réponse. $\tau = \frac{5}{13}\mathbf{i} - \frac{12}{13}\mathbf{j}\sin t + \frac{12}{13}\mathbf{k}\cos t$.

1002. Calculer le vecteur unité tangent à la courbe

$$\begin{cases} x = t \cdot \sin t + \cos t, \\ y = t\cos t - \sin t, \\ x = t^2\sqrt{2} \end{cases}$$

au point $t = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $\tau = -\frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\mathbf{k}$.

1003. Calculer le vecteur τ de l'hélice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \sqrt{R^2 - a^2}\,t$, $R > a > 0$ en un point arbitraire.

Solution. On a

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i}\cos t + a\mathbf{j}\sin t + \sqrt{R^2 - a^2}\,t\mathbf{k},$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\mathbf{i}\sin t + a\mathbf{j}\cos t + \sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{k},$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + R^2 - a^2} = R,$$

$$\tau = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} = \frac{-a\mathbf{i}\sin t + a\mathbf{j}\cos t + \sqrt{R^2-a^2}\,\mathbf{k}}{R} =$$

$$= -\frac{a\sin t}{R}\mathbf{i} + \frac{a\cos t}{R}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\mathbf{k}.$$

1004. Calculer le vecteur β de l'hélice en un point arbitraire.
S o l u t i o n. On a

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\mathbf{i}\sin t + a\mathbf{j}\cos t + \sqrt{R^2-a^2}\,\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -a\mathbf{i}\cos t - a\mathbf{j}\sin t.$$

Calculons le produit vectoriel de ces vecteurs

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & \sqrt{R^2-a^2} \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a\sqrt{R^2-a^2}\sin t\cdot\mathbf{i} - a\sqrt{R^2-a^2}\cos t\cdot\mathbf{j} + a^2\mathbf{k};$$

$$|\mathbf{B}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right| =$$

$$= \sqrt{a^2(R^2-a^2)\sin^2 t + a^2(R^2-a^2)\cos^2 t + a^4} = aR.$$

Par conséquent,

$$\beta = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{a\sqrt{R^2-a^2}\mathbf{i}\sin t - a\sqrt{R^2-a^2}\mathbf{j}\cos t + a^2\mathbf{k}}{aR} =$$

$$= \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\sin t\cdot\mathbf{i} - \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\cos t\cdot\mathbf{j} + \frac{a}{R}\mathbf{k}.$$

1005. Calculer le vecteur ν de l'hélice en un point arbitraire.
S o l u t i o n. Vu le fait que $\nu = \beta \times \tau$, alors

$$\nu = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{R^2-a^2}\sin t}{R} & -\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R} & \\ -\frac{a\sin t}{R} & \frac{a\cos t}{R} & \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\ \frac{a}{R} \end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{i}\cos t - \mathbf{j}\sin t.$$

1006. Calculer la courbure K de l'hélice.
S o l u t i o n. Dans les problèmes 1003 et 1004 nous avons trouvé que

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = R, \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right| = aR,$$

d'où

$$K=\frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}=\frac{aR}{R^3}=\frac{a}{R^2}.$$

1007. Calculer la torsion de l'hélice.

Solution. On a

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-a\mathbf{i}\sin t+a\mathbf{j}\cos t+\sqrt{R^2-a^2}\,\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-a\mathbf{i}\cos t-a\mathbf{j}\sin t,$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}=a\mathbf{i}\sin t-a\mathbf{j}\cos t.$$

Calculons le produit mixte de ces vecteurs:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}=\begin{vmatrix}-a\sin t & a\cos t & \sqrt{R^2-a^2}\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\\ a\sin t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}=a^2\sqrt{R^2-a^2}.$$

Dans le problème 1004 nous avons trouvé que

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|=aR.$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|^2=a^2R^2.$$

Ainsi,

$$\sigma=\frac{a^2\sqrt{R^2-a^2}}{a^2R^2}=\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}.$$

1008. Former l'équation du plan osculateur de l'hélice en un point arbitraire.

Solution. Ce plan passe par le point ($a\cos t$; $a\sin t$; $\sqrt{R^2-a^2}\,t$) et est perpendiculaire au vecteur de la binormale

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\sqrt{R^2-a^2}\sin t}{R}\,\mathbf{i}-\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}\,\mathbf{j}+\frac{a}{R}\,\mathbf{k}.$$

C'est pourquoi le plan osculateur a pour équation:

$$\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\sin t\cdot(X-a\cos t)-$$

$$-\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}(Y-a\sin t)+\frac{a}{R}\left(Z-\sqrt{R^2-a^2}\,t\right)=0,$$

ou

$$X\cdot\sqrt{R^2-a^2}\sin t-Y\cdot\sqrt{R^2-a^2}\cdot\cos t+aZ-a\sqrt{R^2-a^2}\,t=0.$$

1009. Former l'équation du plan rectifiant de l'hélice en un point arbitraire.

Solution. Le plan passe par le point $(a\cos t;\ a\sin t;\ \sqrt{R^2-a^2}t)$ perpendiculairement au vecteur de la normale principale $\mathbf{v} = -\mathbf{i}\cos t - \mathbf{j}\sin t$, et de ce fait a pour équation

$$-(X - a\cos t)\cos t - (Y - a\sin t)\sin t = 0,$$

c'est-à-dire

$$X\cos t + Y\sin t - a = 0.$$

1010. Former l'équation du plan normal de l'hélice en un point arbitraire.

Solution. Le plan est perpendiculaire au vecteur de la tangente $\boldsymbol{\tau} = -\frac{a\sin t}{R}\mathbf{i} + \frac{a\cos t}{R}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\mathbf{k}$ et passe par le point $(a\cos t;\ a\sin t;\ \sqrt{R^2-a^2}t)$.

Son équation est de la forme

$$-\frac{a\sin t}{R}(X - a\cos t) + \frac{a\cos t}{R}(Y - a\sin t) +$$
$$+\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}(Z - \sqrt{R^2-a^2}t) = 0,$$

ou

$$Xa\sin t - Ya\cos t - Z\sqrt{R^2-a^2} + (R^2-a^2)t = 0.$$

1011. Calculer le vecteur $\boldsymbol{\tau}$ de la courbe

$$\begin{cases} x = 6t, \\ y = 3t^2, \\ z = t^3 \end{cases}$$

au point $t = 1$.

Réponse. $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$.

1012. Calculer le vecteur $\boldsymbol{\beta}$ de la même courbe pour $t = 1$.

Réponse. $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$.

1013. Calculer le vecteur $\mathbf{v}$ de la même courbe pour $t = 1$.

Réponse. $-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$.

1014. Calculer la courbure K de la même courbe pour $t = 1$.

Réponse. $\frac{2}{27}$.

1015. Calculer la torsion σ de la même courbe pour $t = 1$.

Réponse. $\frac{2}{27}$.

1016. Former l'équation du plan osculateur de la même courbe pour $t = 1$.

Réponse. $X - 2Y + 2Z - 2 = 0$.

1017. Former l'équation du plan rectifiant de la même courbe pour $t = 1$.

Réponse. $2X - Y - 2Z - 7 = 0$.

1018. Former l'équation du plan normal de la même courbe pour $t = 1$.

Réponse. $2X + 2Y + Z - 19 = 0$.

CHAPITRE VII

CALCUL DIFFÉRENTIEL DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES

§ 1. Domaine d'existence d'une fonction. Lignes et surfaces de niveau

On dit qu'une grandeur variable u est une *fonction uniforme* des deux variables x et y si à chaque point (x, y) (c'est-à-dire à chaque couple de nombres réels), appartenant à un certain ensemble D, il correspond une valeur réelle déterminée de la variable u. Dans ce cas, les variables x et y s'appellent *variables indépendantes*, alors que l'ensemble D s'appelle *domaine de définition* (d'existence) de la fonction. On écrit: $u = f(x, y)$ ou $u = \varphi(x, y)$, etc. La valeur de la fonction $u = f(x, y)$ au point $M(x_0; y_0)$ est désignée par $f(x_0; y_0)$ ou par $f(M)$.

Dans les cas les plus simples, le domaine de définition de la fonction $u = f(x, y)$ représente soit une partie du plan bornée par une courbe fermée (frontière du domaine) dont les points peuvent appartenir ou non au domaine de définition, soit le plan tout entier, soit enfin un ensemble de plusieurs parties du plan xOy. La représentation géométrique d'une fonction $u = f(x, y)$ dans un système de coordonnées rectangulaires $Oxyu$ (le graphique de la fonction) est une surface.

D'une façon analogue on définit une fonction de n'importe quel nombre de variables $u = f(x, y, z, \ldots, t)$.

On appelle *ligne de niveau* d'une fonction $u = f(x, y)$ la courbe $f(x, y) = C$ du plan xOy aux points de laquelle la fonction reste de valeur constante $u = C$.

On appelle *surface de niveau* d'une fonction $u = f(x, y, z) = C$ la surface $f(x, y, z) = C$ aux points de laquelle la fonction reste de valeur constante $u = C$.

1019. Déterminer le domaine d'existence de la fonction $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Solution. La fonction u prend des valeurs réelles si $a^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ ou $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, c'est-à-dire que le domaine d'existence de cette fonction est un cercle (la circonférence frontière y comprise) de rayon a, ayant le centre à l'origine des coordonnées.

1020. Déterminer le domaine d'existence de la fonction $u = \arcsin \frac{x}{y^2}$.

Solution. La fonction $\arcsin \frac{x}{y^2}$ est définie si $y \neq 0$ et $-1 \leqslant \frac{x}{y^2} \leqslant 1$, ou $-y^2 \leqslant x \leqslant y^2$. Le domaine d'existence de la fonction est la partie du plan comprise entre deux paraboles $y^2 = x$ et $y^2 = -x$ excepté le point $O(0; 0)$.

1021. Déterminer le domaine d'existence de la fonction $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$.

Solution. Cette fonction dépend de trois variables et prend des valeurs réelles pour $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0$, ou $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} < -1$, c'est-à-dire que le domaine d'existence de la fonction donnée est une partie de l'espace contenu à l'intérieur d'un hyperboloïde à deux nappes.

1022. Déterminer les lignes de niveau de la fonction $u = x^2 + y^2$.

Solution. L'équation de la famille de lignes de niveau a la forme $x^2 + y^2 = C$ $(C > 0)$. En donnant à C des valeurs réelles différentes, on obtient des circonférences concentriques de centre à l'origine des coordonnées.

1023. Déterminer les surfaces de niveau de la fonction $u = x^2 + z^2 - y^2$.

Solution. L'équation de la famille de surfaces de niveau a la forme $x^2 + z^2 - y^2 = C$.

Pour $C = 0$, $x^2 + z^2 - y^2 = 0$; c'est un cône.

Pour $C > 0$, $x^2 + z^2 - y^2 = C$; c'est la famille d'hyperboloïdes à une nappe.

Pour $C < 0$, $x^2 + z^2 - y^2 = C$; c'est la famille d'hyperboloïdes à deux nappes.

Déterminer les domaines d'existence des fonctions suivantes:

1024. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Réponse. $x^2 + y^2 \geqslant 1$: la partie du plan situé en dehors du cercle unité de centre à l'origine des coordonnées.

1025. $u = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Réponse. L'intérieur du cercle $x^2 + y^2 < 1$.

1026. $u = \arcsin(x + y)$.

Réponse. La bande comprise entre les droites parallèles $x + y \leqslant 1$ et $x + y \geqslant -1$.

1027. $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

Réponse. Les anneaux concentriques: $\frac{\pi}{2} \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 0$, $\frac{5\pi}{2} \geqslant x^2 + y^2 \geqslant \frac{3\pi}{2}$, ...

1028. $u = \ln(-x + y)$.

Réponse. $u > x$: le demi-plan situé au-dessus de la bissectrice $y = x$.

1029. $u = y + \sqrt{x}$.

Réponse. Le demi-plan à droite $(x \geqslant 0)$.

1030. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Réponse. La sphère $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$.

1031. $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Réponse. $-\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$: la partie de l'espace située en dehors du cône $x^2+y^2-z^2=0$.

1032. $u = \frac{1}{\ln(1-x^2-y^2-z^2)}$.

Réponse. L'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2<1$, excepté l'origine des coordonnées.

1033. $u = \sqrt{x+y+z}$.

Réponse. $x+y+z \geqslant 0$: la partie de l'espace disposée au-dessus du plan $x+y+z=0$.

Déterminer les lignes de niveau des fonctions suivantes :

1034. $z = 2x+y$.

Réponse. La famille des droites parallèles $2x+y=C$.

1035. $z = \frac{x}{y}$.

Réponse. La famille des droites passant par l'origine des coordonnées : $x = Cy$.

1036. $z = \ln \sqrt{\frac{y}{x}}$.

Réponse. La famille des droites passant par l'origine des coordonnées : $y = e^{2C}x$ ou $y = C_1 x$ $(C_1 > 0)$.

1037. $z = \frac{\sqrt{x}}{y}$

Réponse. La famille des paraboles $Cy = \sqrt{x}$.

1038. $z = e^{xy}$.

Réponse. La famille des lignes $xy = C$; pour $C \neq 0$, c'est la amille des paraboles équilatères ; pour $C = 0$, c'est l'ensemble d'axes de coordonnées Ox et Oy.

Déterminer les surfaces de niveau des fonctions suivantes :

1039. $u = x+y+3z$.

Réponse. La famille des plans $x+y+3z=C$.

1040. $u = x^2+y^2+z^2$.

Réponse. La famille des sphères $x^2+y^2+z^2=C$ $(C>0)$.

1041. $u = (x^2+y^2+z^2)^2$.

Réponse. La famille des sphères $x^2+y^2+z^2=C$ $(C>0)$. Si $C=0$, alors la sphère dégénère en un point.

§ 2. Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables

1. Dérivées partielles du premier ordre. On appelle *dérivée partielle* d'une fonction $z = f(x, y)$ par rapport à la variable indépendante x la dérivée

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'x(x, y),$$

calculée pour y constant.

On appelle dérivée partielle par rapport à y la dérivée

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}=f'y\,(x,\ y),$$

calculée pour x constant.

Les règles et les formules de dérivation ordinaires sont valables pour le calcul des dérivées partielles.

1042. $u=x^2-3xy-4y^2-x+2y+1$. Trouver $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Solution. En considérant y comme une grandeur constante on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-3y-1.$$

En considérant x constant, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3x-8y+2.$$

1043. $z=e^{x^2+y^2}$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solution. On a

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x=2xe^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y=2ye^{x^2+y^2}.$$

1044. $\rho=u^4\cos^2\varphi$. Calculer $\frac{\partial\rho}{\partial u}$, $\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}$.

Solution. On a

$$\frac{\partial\rho}{\partial u}=4u^3\cos^2\varphi,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}=u^4\cdot 2\cos\varphi\,(-\sin\varphi)=-u^4\sin 2\varphi.$$

1045. Montrer que la fonction $z=y\ln(x^2-y^2)$ satisfait à l'équation

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

Solution. On trouve

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy}{x^2-y^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\ln(x^2-y^2)-\frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

En portant les dérivées partielles dans le premier membre de l'équation :

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{1}{y}\left[\ln(x^2-y^2)-\frac{2y^2}{x^2-y^2}\right]=$$

$$=\frac{2y}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}+\frac{\ln(x^2-y^2)}{y}\equiv\frac{z}{y^2},$$

on obtient une identité, c'est-à-dire que la fonction z satisfait à l'équation donnée.

1046. Montrer que la fonction $z = y^{y/x} \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ satisfait à l'équation

$$x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

Solution. On trouve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{y/x} \cdot \ln y \left(-\frac{y}{x^2}\right) \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[y^{y/x} \cdot \ln y \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot y^{y/x-1}\right] \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

En portant les dérivées partielles dans le premier membre de l'équation :

$$-x^2 \frac{y}{x^2} \cdot y^{y/x} \cdot \ln y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cdot \frac{y}{x^2} \times$$

$$\times y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot \frac{y}{x} \cdot y^{y/x-1} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) +$$

$$+ xy \cdot \frac{1}{x} \cdot y^{y/x} \cdot \ln y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot \frac{1}{x} \cdot y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) = yy^{y/x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \equiv yz,$$

on obtient une identité ; par conséquent, la fonction z satisfait à l'équation donnée.

1047. $u = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 4$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y - 3x + 2$.

1048. $r - \rho^2 \cdot \sin^4 \theta$. Calculer $\frac{\partial r}{\partial \rho}$, $\frac{\partial r}{\partial \theta}$.

Réponse. $\frac{\partial r}{\partial \rho} = 2\rho \sin^4 \theta$, $\frac{\partial r}{\partial \theta} = 4\rho^2 \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta$.

1049. $u = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}$.

1050. $z = e^{xy(x^2+y^2)}$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy(x^2+y^2)} (3x^2y + y^3)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy(x^2+y^2)} (x^3 + 3xy^2).$$

1051. $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2 \cdot \sqrt[3]{z^2}$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$.

1052. $u = e^{x/y} + e^{-z/y}$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{x/y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{x/y} + \frac{z}{y^2} e^{-z/y}$,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{y} e^{-z/y}.$$

1053. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x^2}$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}$.

1054. $z = e^{(x^3+y^2)^2}$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 (x^3 + y^2) e^{(x^3+y^2)^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y (x^3 + y^2) \cdot e^{(x^3+y^2)^2}.$$

1055. $u = (x-y)(x-z)(y-z)$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial x} = (y-z)(2x-y-z)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = (x-z)(x-2y+z)$,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x-y)(-y+2z-x).$$

1056. $u = e^{3x^2+2y^2-xy}$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial x} = (6x-y) e^{3x^2+2y^2-xy}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (4y-x) e^{3x^2+2y^2-xy}.$$

1057. $u = e^{xyz} \cdot \sin \frac{y}{x}$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz} \cdot \sin \frac{y}{x} + \frac{1}{x} e^{xyz} \cdot \cos \frac{y}{x}$.

1058. Montrer que la fonction $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{2} x + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ satisfait à l'équation $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$.

1059. Calculer $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ lorsque $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

Réponse. ρ.

2. Différentielle totale. On appelle *accroissement total d'une fonction* $z = f(x, y)$ en un point $M(x; y)$ la différence

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

où Δx, Δy sont des accroissements arbitraires donnés aux variables indépendantes de cette fonction.

La fonction $z = f(x, y)$ est dite *différentiable* au point (x, y), si en ce point l'accroissement total peut être présenté sous la forme

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

où $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

On appelle *différentielle totale de la fonction* $z = f(x, y)$ la partie principale de l'accroissement total Δz, cette partie étant linéaire par rapport aux accroissements donnés aux variables indépendantes Δx et Δy, c'est-à-dire $dz = A\,\Delta x + B\,\Delta y$.

Les différentielles des variables indépendantes coïncident avec leurs accroissements, c'est-à-dire $dx = \Delta x$ et $dy = \Delta y$.

La différentielle totale de la fonction $z = f(x, y)$ se calcule d'après la formule

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

De même, la différentielle totale d'une fonction de trois variables indépendantes $u = f(x, y, z)$ se calcule d'après la formule

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

La valeur de $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ étant suffisamment petite, pour la fonction différentiable $z = f(x, y)$ ont lieu les égalités approchées

$$\Delta z \approx dz \quad \text{et} \quad f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz.$$

1060. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x-y}$. Calculer dz.

Solution. Calculons $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Par conséquent,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

1061. $u = x^{y^2 x}$. Calculer du.

Solution. On a

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot y^2.$$

Par conséquent,

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}\,dx + 2yz \cdot x^{y^2 z} \cdot \ln x\,dy + y^2 x^{y^2 z} \cdot \ln x\,dz.$$

1062. Calculer approximativement $\sqrt{\sin^2 1{,}55+8e^{1{,}015}}$ compte tenu de la valeur de la fonction $z=\sqrt{\sin^2 x+8e^y}$ si $x=\frac{\pi}{2}\approx$ $\approx 1{,}571$, $y=0$.

Solution. Le nombre cherché est la valeur accrue de la fonction z pour $\Delta x=0{,}021$, $\Delta y=0{,}015$.

Calculons la valeur de z pour $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$:

$$z=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{2}+8e^0}=3.$$

On trouve l'accroissement de la fonction:

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\sin 2x\Delta x+8e^y\Delta y}{2\sqrt{\sin^2 x+8e^y}}=\frac{8\cdot 0{,}015}{6}=0{,}02.$$

Par conséquent, $\sqrt{\sin^2 1{,}55+8e^{0{,}015}}\cong 3{,}02$.

1063. Calculer approximativement $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$, compte tenu de la valeur de la fonction $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ pour $x=1$, $y=1$.

Solution. La fonction z, pour $x=1$, $y=1$, a pour valeur:

$$z=\operatorname{arctg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}\cong 0{,}785.$$

Calculons l'accroissement de la fonction Δz si $\Delta x=-0{,}05$, $\Delta y=0{,}02$:

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=-\frac{y\Delta x}{x^2+y^2}+\frac{x\Delta y}{x^2+y^2}=$$
$$=\frac{x\Delta y-y\Delta x}{x^2+y^2}=\frac{1\cdot 0{,}02+1\cdot 0{,}05}{2}=0{,}035.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}=z+\Delta z\approx 0{,}785+0{,}035=0{,}82.$$

1064. $z=\ln(x^2+y^2)$. Calculer dz.

Réponse. $dz=\frac{2(x\,dx+y\,dy)}{x^2+y^2}$.

1065. $z=\ln\operatorname{tg}(y/x)$. Calculer dz.

Réponse. $dz=\frac{2(x\,dy-y\,dx)}{x^2\sin\frac{2y}{x}}$.

1066. $z=\sin(x^2+y^2)$. Calculer dz.

Réponse. $2(x\,dx+y\,dy)\cos(x^2+y^2)$.

1067. $z = x^y$. Calculer dz.

Réponse. $dz = x^y \left(\frac{y}{x}\, dx + \ln x\, dy\right)$.

1068. $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Calculer du.

Réponse. $du = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(dx + \frac{y\, dy}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

1069. $z = e^x (\cos y + x \sin y)$. Calculer dz.

Réponse. $dz = e^x [(x \cos y - \sin y)\, dy + (\sin y + \cos y + x \sin y)\, dx]$.

1070. $z = e^{x+y} (x \cos y + y \sin x)$. Calculer dz.

Réponse. $dz = e^{x+y} \{[(x+1) \cos y + y (\sin x + \cos x)]\, dx +$
$+ [x (\cos y - \sin y) + (y+1) \sin x]\, dy\}$.

1071. $z = \operatorname{arctg} \frac{2(x + \sin y)}{4 - x \sin y}$. Calculer dz.

Réponse. $dz = \frac{2\, dx}{x^2+4} + \frac{2 \cos y\, dy}{\sin^2 y + 4}$.

1072. $u = e^{xyz}$. Calculer du.

Réponse. $du = e^{xyz} (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz)$.

1073. Calculer approximativement $1{,}02^{4{,}05}$ compte tenu de la valeur de la fonction $z = x^y$ pour $x = 1$, $y = 4$, et en remplaçant son accroissement par la différentielle.

Réponse. 1,08.

1074. Calculer approximativement $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$ compte tenu de la valeur de la fonction $z = \ln(x^3 + y^3)$ pour $x = 0$, $y = 1$.

Réponse. —0,03.

1075. Calculer approximativement $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$, compte tenu de la valeur de la fonction $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ pour $x = 1$, $y = 0$.

Réponse. 1,013.

1076. Calculer approximativement $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$, compte tenu de la valeur de la fonction $z = \sqrt{5e^x + y^2}$ pour $x = 0$, $y = 2$.

Réponse. 3,037.

1077. Calculer approximativement $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$ compte tenu de la valeur de la fonction $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ pour $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

Réponse. 1,05.

3. Dérivées partielles et différentielles d'ordre supérieur. *Les dérivées partielles secondes* de la fonction $z = f(x, y)$ sont les dérivées partielles de ses dérivées partielles premières.

Les dérivées partielles secondes ont pour notations:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial^2 x} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

De même, on définit et on désigne les dérivées partielles troisièmes et celles d'ordre supérieur, à savoir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f'''_{xxx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=f'''_{xxy}(x, y), \text{ etc.}$$

Les dérivées dites « mixtes », qui ne se distinguent l'une de l'autre que par l'ordre de dérivation, sont égales entre elles, à condition qu'elles soient continues, par exemple, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

La *différentielle seconde* de la fonction $z = f(x, y)$ est la différentielle de sa différentielle totale, c'est-à-dire

$$d^2 z = d(dz).$$

De même, on définit les différentielles troisièmes et celles d'ordre supérieur:

$$d^3 z = d(d^2 z),$$

d'une façon générale

$$d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Si x et y sont des variables indépendantes et que la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles continues, alors les différentielles d'ordre supérieur se calculent d'après les formules:

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}dx\, dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

$$d^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}dx\, dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3;$$

en général, on a la formule symbolique

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

qui, formellement, se développe suivant la loi binomiale.

1078. $z=y\cdot\ln x$. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Solution. Calculons les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\ln x.$$

Ensuite, calculons les dérivées secondes:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\ln x)=0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}.$$

1079. $z=\ln \operatorname{tg}\frac{y}{x}$. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

Solution. On a

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}\cdot\sec^2\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{2}{\sin\frac{2y}{x}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{2}{\sin\frac{2y}{x}}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{-2\cos\frac{2y}{x}\cdot\frac{2}{x}}{\sin^2\frac{2y}{x}}=$$

$$=\frac{2}{x^3\cdot\sin^2\frac{2y}{x}}\cdot\left(2y\cos\frac{2y}{x}-x\sin\frac{2y}{x}\right).$$

1080. $z=\sin x\cdot\sin y$. Calculer d^2z.

Solution. On a

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x\sin y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\cos x\cos y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin x\sin y,$$

$$d^2z=-\sin x\sin y\,dx^2+2\cos x\cos y\,dx\,dy-\sin x\sin y\,dy^2.$$

1081. $z=x^2y$. Calculer d^3z.

Solution. On a

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=2,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=0;$$

$$d^3z=0\cdot dx^3+3\cdot 2dx^2\,dy+3\cdot 0\cdot dx\cdot dy^2+0\cdot dy^3=6dx^2\,dy.$$

1082. $u=4x^3+3x^2y+3xy^2-y^3$. Calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

Réponse. $6(x+y)$.

1083. $u=xy+\sin(x+y)$. Calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Réponse. $-\sin(x+y)$.

1084. $u=\ln\operatorname{tg}(x+y)$. Calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

Réponse. $-\frac{4\cos(2x+2y)}{\sin^2(2x+2y)}$.

1085. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

Réponse. 0.

1086. $z=x^2\ln(x+y)$. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

Réponse. $\frac{x(x+2y)}{(x+y)^2}$.

1087. $u = x \sin xy + y \cos xy$. Calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Réponse. $y(2 - y^2) \cos xy - xy^2 \sin xy$.

1088. $u = \sin(x + \cos y)$. Calculer $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$.

Réponse. $\sin y \cdot \cos(x + \cos y)$.

1089. $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. Calculer $d^2 z$.

Réponse. $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}(dy^2 - dx^2) - \frac{4xy\, dx\, dy}{(x^2 + y^2)^2}$.

1090. $z = \cos(x + y)$. Calculer $d^2 z$.

Réponse. $-\cos(x + y)(dx + dy)^2$.

1091. $z = \cos(ax + e^y)$. Calculer $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

Réponse. $ae^y [e^y \sin(ax + e^y) - \cos(ax + e^y)]$.

1092. $u = \frac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y}$. Calculer $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$.

Réponse. 4.

1093. $z = x^2 y^3$. Vérifier si $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5 z}{\partial y^3 \partial x^2}$.

1094. $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 7$. Calculer $d^2 z$.

Réponse. $2(dx^2 - dx\, dy + dy^2)$.

1095. Montrer que la fonction $z = \varphi(x) \cdot g(y)$ satisfait à l'équation $z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$.

1096. Montrer que la fonction $z = g(x) + yg'(x)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

4. Dérivation des fonctions composées. Soit $z = f(x, y)$ où $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ et les fonctions $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont dérivables.

Dans ces conditions, la dérivée de la fonction composée $z = f[\varphi(t)\, \psi(t)]$ se calcule d'après la formule

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Si $z = f(x, y)$ où $y = \varphi(x)$, alors la *dérivée totale* de la fonction z par rapport à x se calcule d'après la formule

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Si toutefois $z = f(x, y)$, où $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, alors les dérivées partielles s'expriment comme suit :

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

1097. $z = e^{x^2+y^2}$, où $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Calculer $\frac{dz}{dt}$.

Solution. On a

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2}\cdot 2x\,(-a\sin t) + e^{x^2+y^2}\cdot 2y\,(a\cos t) =$$
$$= 2ae^{x^2+y^2}(y\cos t - x\sin t).$$

En remplaçant x et y par t, on obtient

$$\frac{dz}{dt} = 2ae^{a^2}(a\sin t\cos t - a\cos t\sin t) = 0.$$

1098. $z = \ln(x^2 - y^2)$, où $y = e^x$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$.

Solution. On a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2}.$$

En utilisant la formule

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

on trouve

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{2ye^x}{x^2 - y^2} = \frac{2(x - ye^x)}{x^2 - y^2}.$$

1099. $z = \frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, où $u = \operatorname{tg}^2 x$, $v = \operatorname{ctg}^2 x$. Calculer $\frac{dz}{dx}$.

Réponse. $\frac{4}{\sin 2x}$.

1100. $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, où $y = 3x + 1$. Calculer $\frac{dz}{dx}$.

Réponse. $\frac{2x(3x+2)}{(x^2+3x+1)^2}$.

1101. $z = x^2 y$, où $y = \cos x$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{dz}{dx}$.

Réponse. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos x$, $\frac{dz}{dx} = x(2\cos x - x\sin x)$.

1102. $z = \ln\frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$, où $y = x\cos\alpha$. Calculer $\frac{dz}{dx}$.

Réponse. 0.

1103. $z = x^2 + y^2$, où $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial \eta}$.

Réponse. $\frac{\partial z}{\partial \xi} = 4\xi$, $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 4\eta$.

1104. $u = \ln(x^2 + y^2)$, où $x = \xi\eta$, $y = \frac{\xi}{\eta}$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$.

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{2}{\xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{2(\eta^4 - 1)}{\eta(\eta^4 + 1)}$.

1105. Montrer que la fonction $u = \ln \frac{1}{r}$, où

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

satisfait à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5. Dérivée dans une direction donnée. Gradient d'une fonction. On appelle *dérivée* d'une fonction $z = f(x, y)$ en un point $M(x, y)$ *dans la direction* du vecteur $\mathbf{l} = \overline{MM_1}$ la limite

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{MM_1 \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{MM_1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho},$$

où $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Si la fonction $f(x, y)$ est dérivable, alors la dérivée dans la direction donnée se calcule d'après la formule

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,$$

où α est l'angle formé par le vecteur $\mathbf{l}$ avec l'axe Ox.

De même, on définit la dérivée dans une direction donnée d'une fonction de trois variables $u = f(x, y, z)$. Dans ce cas, la formule en question est de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

où $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ sont les cosinus directeurs du vecteur $\mathbf{l}$.

On appelle *gradient* d'une fonction $z = f(x, y)$ en un point $M(x, y)$ le vecteur issu du point M et ayant pour coordonnées les dérivées partielles de la fonction z:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j}.$$

Le gradient de la fonction et la dérivée dans la direction du vecteur $\mathbf{l}$ sont liés par la formule

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \operatorname{proj}_{\mathbf{l}} \operatorname{grad} z.$$

Le gradient indique la direction correspondant à la croissance la plus rapide d'une fonction au point donné. La dérivée $\frac{\partial z}{\partial l}$ dirigée vers le gradient atteint sa plus grande valeur qui est égale à

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{p.g.v.}} = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Dans le cas d'une fonction $u = f(x, y, z)$, le gradient de cette fonction a pour équation:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

1106. Calculer la dérivée de la fonction $z = x^2 - y^2$ au point $M(1; 1)$ dans la direction du vecteur $\mathbf{l}$ formant un angle $\alpha = 60°$ avec la direction positive de l'axe Ox.

Solution. Calculons les dérivées partielles au point M:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=2,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=-2.$$

On a

$$\cos\alpha=\cos 60^\circ=\frac{1}{2};\quad \sin\alpha=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial z}{\partial l}=2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}\approx-0{,}7.$$

1107. Calculer la dérivée de la fonction $u=xy^2z^3$ au point M (3; 2; 1) dans la direction du vecteur $\overline{MN}$, où N (5; 4; 2).

Solution. Calculons le vecteur $\overline{MN}$:

$$\overline{MN}=\mathbf{l}=(5-3)\,\mathbf{i}+(4-2)\,\mathbf{j}+(2-1)\,\mathbf{k}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

et ses cosinus directeurs

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

Les dérivées partielles se calculent comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=4;\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=12;\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=36.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=4\cdot\frac{2}{3}+12\cdot\frac{2}{3}+36\cdot\frac{1}{3}=22\,\frac{2}{3}.$$

1108. Calculer la dérivée de la fonction $z=\ln(x^2+y^2)$ au point M (3; 4) dans la direction du gradient de la fonction z.

Solution. Dans ce cas, le vecteur $\mathbf{l}$ coïncide avec le gradient de la fonction $z=\ln(x^2+y^2)$ au point M (3; 4) et est égal à:

$$\operatorname{grad} z=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)_M\mathbf{i}+\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)_M\mathbf{j}=\frac{6}{25}\,\mathbf{i}+\frac{8}{25}\,\mathbf{j}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial z}{\partial l}=|\operatorname{grad} z|=\sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^2}=\frac{2}{5}.$$

1109. Calculer la valeur et la direction du gradient de la fonction $u=\operatorname{tg}x-x+3\sin y-\sin^3 y+z+\operatorname{cotg}z$ au point $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Solution. Trouvons les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sec^2 x-1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3\cos y-3\sin^2 y\cdot\cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=1-\operatorname{cosec}^2 z$$

et calculons leurs valeurs au point $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=\sec^2\frac{\pi}{4}-1=2-1=1,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=3\cos\frac{\pi}{3}-3\sin^2\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=1-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}=0.$$

Par conséquent,

$$(\operatorname{grad} u)_M=\mathbf{i}+\frac{3}{8}\mathbf{j};$$

$$|\operatorname{grad} u|_M=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{1}{8}\sqrt{73};$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\frac{1}{8}\sqrt{73}}=\frac{8}{\sqrt{73}};\quad \cos\beta=\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{73}}.$$

1110. Calculer la dérivée de la fonction $z=x^2-xy+y^2$ au point $M(1;\ 1)$ dans la direction du vecteur $\mathbf{l}=6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$.

Réponse. $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_M=\frac{7}{5}$.

1111. Calculer la dérivée de la fonction $u=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ au point $M(1;\ 1;\ 1)$ dans la direction du vecteur $\overline{MN}$, où $N(3;\ 2;\ 3)$.

Réponse. $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\frac{1}{6}$.

1112. Calculer la dérivée de la fonction $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ au point $M(1;\ 2;\ 1)$ dans la direction du vecteur $\mathbf{r}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

Réponse. $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\frac{7}{9}$.

1113. Calculer la valeur et déterminer la direction du gradient de la fonction $u=\frac{1}{r}$, où, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, au point $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Réponse. $|\operatorname{grad} u|_M=\frac{1}{r_0^2}$, $\cos\alpha=-\frac{x_0}{r_0}$, $\cos\beta=-\frac{y_0}{r_0}$, $\cos\gamma=-\frac{z_0}{r_0}$, où $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

1114. Calculer la valeur et déterminer la direction du gradient de la fonction $u = xyz$ au point $M(2;\ 1;\ 1)$.

Réponse. $|\operatorname{grad} u|_M = 3$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{2}{3}$.

1115. Calculer la dérivée de la fonction $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z$ dans la direction du vecteur $\mathbf{l} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ en un point arbitraire.

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{3}$.

6. Dérivation des fonctions implicites. La dérivée d'une fonction implicite $y = y(x)$ donnée par l'équation $F(x, y) = 0$, où $F(x, y)$ est une fonction différentiable des variables x et y, peut être calculée d'après la formule

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

à condition que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction implicite peuvent être calculées en dérivant successivement la formule ci-dessus et en considérant, dans ce cas, y comme fonction de x.

De même, les dérivées partielles d'une fonction implicite de deux variables $z = \varphi(x, y)$, donnée par l'équation $F(x, y, z) = 0$, où $F(x, y, z)$ est une fonction différentiable des variables x, y et z, peuvent être calculées d'après les formules:

$$\frac{\partial z}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

à condition que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

1116. $\cos(x+y) + y = 0$. Calculer y'.

Solution. Ici $F(x, y) = \cos(x+y) + y$. Calculons $\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(x+y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\sin(x+y) + 1$. Par conséquent,

$$y' = -\frac{-\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)} = \frac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}.$$

1117. $y - \sin y = x$. Calculer y' et y''.

Solution. On a $F(x, y) = y - \sin y - x$. Calculons $\frac{\partial F}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \cos y = 2\sin^2\frac{y}{2}$, d'où l'on tire

$$y' = -\frac{-1}{2\sin^2\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{y}{2}.$$

La dérivée seconde est égale à :

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{cosec} \frac{y}{2} \left(-\operatorname{cosec} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{y}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} y' =$$
$$= -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^4 \frac{y}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{y}{2}.$$

1118. $z^3 - 3xyz = a^3$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solution. Ici $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$. Calculons $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

On a alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

1119. $xyz = x + y + z$. Calculer dz.

Solution. Comme on le sait, $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$; c'est pourquoi calculons d'abord $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz - 1}{xy - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz - 1}{xy - 1}.$$

Par conséquent,

$$dz = -\frac{1}{xy - 1} [(yz - 1)\, dx + (xz - 1)\, dy].$$

1120. $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = a^2$. Calculer y'.

Réponse. $-\frac{x}{y}$.

1121. $\frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} = a$. Calculer y'.

Réponse. $\frac{y}{x}$.

1122. $(xy - \alpha)^2 + (xy - \beta)^2 = r^2$. Calculer y', y''.

Réponse. $y' = -\frac{y}{x}$, $y'' = \frac{2y}{x^2}$.

1123. $x^3 + 2y^3 - 2xy\sqrt{2xy} + 1 = 0$. Calculer y'.

Réponse. $-\frac{x^2 - y\sqrt{2xy}}{2y^2 - x\sqrt{2xy}}$.

1124. $\ln \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = a$. Calculer y'.

Réponse. $\frac{y}{x}$.

1125. $(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2)$. Calculer y' au point $M(b\,;\,b)$.

Réponse. $\frac{a^2-b^2}{2b^2-a^2}$.

1126. $3\sin\frac{\sqrt{x}}{y}-2\cos\frac{\sqrt{x}}{y}+1=0$. Calculer y'.

Réponse. $\frac{y}{2x}$.

1127. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$. Calculer y'.

Réponse. $\frac{x+y}{x-y}$.

1128. $x^2-x\cdot 2^{y+1}+4^y-x+2^y+2=0$. Calculer y'.

Réponse. $\frac{1}{2^y\ln 2}$.

1129. $x+y-e^{x+y}=0$. Calculer y', y''.

Réponse. $y'=-1$, $y''=0$.

1130. $x+y+z=e^z$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$.

1131. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2-yz}{z^2-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2-xz}{z^2-xy}$.

1132. $x=z\ln\frac{z}{y}$. Calculer dz.

Réponse. $dz=\frac{dx+z/y\,dy}{1+\ln(z/y)}$.

1133. $x\sin y+y\sin x+z\sin x=a$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Réponse. $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x\cos y+\sin x}{\sin x}$.

1134. $xy+xz+yz=1$. Calculer dz.

Réponse. $dz=-\frac{(y+z)\,dx+(x+z)\,dy}{x+y}$.

1135. $xe^y+ye^x+ze^x=a$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Réponse. $\frac{\partial z}{\partial x}=-y-z-e^{y-x}$.

1136. $z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Réponse. 1.

§ 3. Plan tangent et normale à une surface

On appelle *plan tangent* à la surface en un point M le plan qui contient toutes les tangentes aux courbes tracées sur la surface et passant par le point M.

On appelle *normale* à la surface la droite passant par le point de tangence M et perpendiculaire au plan tangent.

Si la surface est donnée par l'équation $F(x, y, z) = 0$, alors l'équation du plan tangent au point $M(x_0; y_0; z_0)$ de la surface est de la forme

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z-z_0)=0,$$

où $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ sont les valeurs des dérivées partielles au point M, alors que x, y, z sont les coordonnées courantes d'un point du plan tangent.

Les équations de la normale sont

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

Ici, x, y, z sont les coordonnées courantes d'un point de la normale.

Si l'équation de la surface est donnée sous forme explicite $z = f(x, y)$, alors l'équation du plan tangent au point $M(x_0; y_0; z_0)$ est de la forme

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y-y_0)$$

et les équations de la normale sont

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

1137. On donne la surface $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ contenant le point $M(1; 1; 1)$. Former l'équation du plan tangent et les équations de la normale au point M.

Solution. Calculons les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y-1$ et $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+2y+2$ et leurs valeurs au point $M(1; 1; 1)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=-1, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=2.$$

L'équation du plan tangent est:

$$z-1=-(x-1)+2(y-1), \quad \text{ou} \quad x-2y+z=0.$$

Les équations de la normale sont:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

1138. Mener à la surface $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ les plans tangents parallèles au plan $x + y + z = 1$.

Solution. Ici, $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 11$. Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 6z.$$

De la condition de parallélisme du plan tangent et du plan donné il s'ensuit que $\frac{\partial F/\partial x}{1} = \frac{\partial F/\partial y}{1} = \frac{\partial F/\partial z}{1}$, ou $\frac{2x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{6z}{1}$. Après avoir ajouté à ces équations l'équation de la surface $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$, on trouve les coordonnées des points de tangence :

$$M_1\left(\sqrt{6};\ \frac{\sqrt{6}}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ et } M_2\left(-\sqrt{6};\ -\frac{\sqrt{6}}{2};\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Par conséquent, les plans tangents ont pour équations

$$1\cdot(x \pm \sqrt{6}) + 1\cdot\left(y \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 1\cdot\left(z \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x + y + z + \frac{11}{\sqrt{6}} = 0 \text{ et } x + y + z - \frac{11}{\sqrt{6}} = 0.$$

1139. Former les équations du plan tangent et de la normale à la surface $z = 1 + x^2 + y^2$ au point $M(1;\ 1;\ 3)$.

Réponse. $2x + 2y - z = 1$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

1140. Former les équations du plan tangent et de la normale à la surface $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ au point $M(2;\ 2;\ 3)$.

Réponse. $2x + 2y - 3z + 1 = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

1141. Former les équations du plan tangent et de la normale à la surface $z = \ln(x^2 + y^2)$ au point $M(1;\ 0;\ 0)$.

Réponse. $z = 2(x-1)$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$.

1142. Former les équations du plan tangent et de la normale à la surface $z = \sin x \cos y$ au point $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{1}{2}\right)$.

Réponse. $x - y - 2z + 1 = 0$, $\frac{x - \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-2}$.

1143. Former les équations des plans tangents à la surface $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ et parallèles au plan $x + 4y + 6z = 0$.

Réponse. $x + 4y + 6z \pm 21 = 0$.

1144. Montrer que les plans tangents à la surface $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ déterminent sur les axes de coordonnées des segments dont la somme est constante.

1145. En quel point de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ la normale à celui-ci forme des angles égaux avec les axes de coordonnées?

Réponse. $x=\pm\frac{4}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}$, $z=\pm\frac{1}{3}$.

1146. Montrer que $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ si $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface $z=f(x, y)$.

§ 4. Extrémum d'une fonction de deux variables indépendantes

1. Extrémum d'une fonction. On dit que la fonction $z=f(x, y)$ a un *maximum* (*minimum*) au point M_0 $(x_0;\ y_0)$ si la valeur de la fonction en ce point est plus grande (plus petite) que sa valeur en n'importe quel autre point M $(x;\ y)$ d'un certain voisinage du point M_0, c'est-à-dire que $f(x_0, y_0)>f(x, y)$ (respectivement $f(x_0, y_0)<f(x, y)$) et ceci, pour tous les points M $(x;\ y)$ vérifiant la condition $M_0M<\delta$, où δ est un certain nombre (ne fût-ce que petit) positif.

Le maximum ou le minimum d'une fonction est appelé son *extrémum*. Le point M_0 en lequel la fonction a un extrémum s'appelle point d'extrémum.

Si une fonction différentiable $z=f(x, y)$ atteint son extrémum au point M_0 $(x_0;\ y_0)$, alors ses dérivées partielles du premier ordre sont nulles en ce point, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}=0$$

(conditions nécessaires d'extrémum).

Les points en lesquels les dérivées partielles sont nulles s'appellent *points stationnaires*. Tout point stationnaire n'est pas nécessairement un point d'extrémum.

Soit M_0 $(x_0;\ y_0)$ un point stationnaire de la fonction $z=f(x, y)$. Désignons:

$$A=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2},\quad B=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\,\partial y},\quad C=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

et formons le *discriminant* $\Delta=AC-B^2$. Alors:

si $\Delta>0$, la fonction a un extrémum au point M_0, plus précisément un maximum pour $A<0$ (ou $C<0$) et un minimum pour $A>0$ (ou $C>0$);

si $\Delta<0$, il n'y a pas d'extrémum au point M_0 (conditions suffisantes de présence ou d'absence d'extrémum);

si $\Delta=0$, il convient de procéder à une étude plus approfondie (cas douteux).

1147. Trouver l'extrémum de la fonction

$$z=x^2+xy+y^2-3x-6y.$$

Solution. 1) Calculons les dérivées partielles premières

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-6.$$

2) En utilisant les conditions nécessaires d'extrémum, on trouve les points stationnaires :

$$\begin{cases} 2x+y-3=0, \\ x+2y-6=0, \end{cases}$$

d'où $x = 0$, $y = 3$; M (0 ; 3).

3) Calculons les dérivées partielles secondes au point M :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1$$

et formons le discriminant

$$\Delta = AC - B^2 = 2\cdot 2 - 1 = 3 > 0; \quad A > 0.$$

Par conséquent, la fonction donnée a un minimum au point M (0 ; 3). La valeur de ce minimum est $z_{\min} = -9$.

1148. Trouver l'extrémum de la fonction

$$z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right).$$

S o l u t i o n. 1) Calculons les dérivées partielles premières

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}.$$

2) En utilisant les conditions nécessaires d'extrémum, on trouve les points stationnaires :

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0, \\ -\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}=0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8x+y=188, \\ x+6y=141. \end{cases}$$

D'où $x = 21$, $y = 20$; point stationnaire M (21 ; 20).

3) Calculons les dérivées secondes au point M :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1}{12}.$$

Alors

$$\Delta=AC-B^2=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{144}>0.$$

Etant donné que $A < 0$, la fonction a un maximum au point M (21 ; 20) :

$$z_{\max}=\frac{1}{2}21\cdot 20+(47-21-20)\left(\frac{21}{3}+\frac{20}{4}\right)=282.$$

1149. Trouver l'extrémum de la fonction $z = xy^2(1 - x - y)$.

Réponse. $z_{\max} = \frac{1}{64}$.

1150. Trouver l'extrémum de la fonction $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Réponse. $z_{\min} = -125$.

1151. Trouver l'extrémum de la fonction $z = 4 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$.

Réponse. $z_{\max} = 4$.

1152. Trouver l'extrémum de la fonction $z = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} - (x^2 + y^2)$.

Réponse. $z_{\min} = 0$.

1153. Trouver l'extrémum de la fonction

$$z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}.$$

Réponse. $z_{\max} = \frac{a\sqrt{3}}{9}$ pour $x = y = \frac{2}{3}a$.

2. Extrémum lié. La plus grande et la plus petite valeur d'une fonction dans un domaine fermé. On appelle *extrémum lié* d'une fonction $z = f(x, y)$ l'extrémum que cette fonction atteint à condition que les variables x et y soient liées par l'équation $\varphi(x, y) = 0$ (*équation de liaison*).

La recherche d'un extrémum lié peut être ramenée à l'étude de l'extrémum ordinaire de l'ainsi dite *fonction de Lagrange*:

$$u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

où λ est un facteur constant indéterminé.

Les conditions nécessaires d'extrémum sont:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

De ce système des trois équations on peut trouver les inconnues x, y et λ.

Pour déterminer *la plus grande* et *la plus petite* valeur d'une fonction dans un domaine fermé, il faut:

1) trouver les points stationnaires situés dans le domaine donné et calculer les valeurs de la fonction en ces points;

2) déterminer les plus grandes et les plus petites valeurs de la fonction sur les lignes formant la frontière du domaine;

3) choisir la plus grande et la plus petite valeur de toutes les valeurs trouvées.

1154. Trouver l'extrémum de la fonction $z = xy$ à condition que x et y soient liés par l'équation $2x + 3y - 5 = 0$.

S o l u t i o n. Examinons la fonction de Lagrange $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda.$$

En résolvant le système d'équations (conditions nécessaires d'extrémum)

$$\begin{cases} y+2\lambda=0, \\ x+3\lambda=0, \\ 2x+3y-5=0, \end{cases}$$

on trouve $\lambda=-\frac{5}{12}$, $x=\frac{5}{4}$, $y=\frac{5}{6}$. Il est aisé de voir qu'au point $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ la fonction $z=xy$ atteint sa plus grande valeur $z_{\max}=\frac{25}{24}$.

1155. Déterminer parmi les triangles rectangles d'aire S donnée celui dont l'hypoténuse est minimum.

Solution. Soient x et y les côtés d'un triangle et z son hypoténuse. Etant donné que $z^2 = x^2 + y^2$, le problème se ramène à la détermination de la plus petite valeur de la fonction $x^2 + y^2$ à condition que x et y soient liés par l'équation $\frac{xy}{2} = S$, c'est-à-dire que $xy - 2S = 0$. Examinons la fonction $u = x^2 + y^2 + \lambda (xy-2S)$ et calculons ses dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+\lambda y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+\lambda x.$$

Etant donné que $x > 0$, $y > 0$, du système d'équations

$$\begin{cases} 2x+\lambda y=0, \\ 2y+\lambda x=0, \\ \frac{xy}{2}=S \end{cases}$$

on obtient la solution $x = y = \sqrt{2S}$, $\lambda = -2$.

Ainsi, l'hypoténuse a la plus petite valeur si les côtés du triangle sont égaux.

1156. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = x^2 + y^2$ dans le cercle $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leqslant 9$.

Solution. On examine ici le domaine D borné par la circonférence $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$, y compris les points de cette circonférence.

Trouvons les points stationnaires de la fonction $z = x^2 + y^2$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y$. Tenant compte des conditions nécessaires d'extrémum, on trouve $x = 0$, $y = 0$.

Il est aisé de voir qu'au point $(0; 0)$ la fonction $z = x^2 + y^2$ a sa plus petite valeur $z_{\text{p. p. v.}} = 0$. Dans ces conditions, ledit point est un point intérieur au domaine D. Cherchons l'extrémum lié de la fonction $z = x^2 + y^2$ si x et y sont liés par la relation $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$.

Examinons la fonction

$$u = x^2 + y^2 + \lambda\,[(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9].$$

Calculons les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda\,(x - \sqrt{2}), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y - \sqrt{2}).$$

Afin de déterminer x, y et λ, on établit le système d'équations

$$\begin{cases} x + \lambda\,(x - \sqrt{2}) = 0, \\ y + \lambda\,(y - \sqrt{2}) = 0, \\ (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9. \end{cases}$$

Ce système possède deux solutions :

$$x = y = \frac{5}{2}\sqrt{2}, \quad \lambda = -\frac{5}{3} \text{ et } z = 25;$$

$$x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{3} \text{ et } z = 1.$$

Par conséquent, la fonction prend la plus grande valeur au point $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}; \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$ de la circonférence.

Donc, $z_{\text{p.p.v.}} = 0$, $z_{\text{p.g.v.}} = 25$.

1157. Trouver l'extrémum de la fonction $z = x^2 + y^2$ si x et y sont liés par l'équation $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

Réponse. $z_{\min} = \frac{144}{25}$ au point $\left(\frac{36}{25}; \frac{48}{25}\right)$.

1158. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ dans le domaine fermé, borné par les droites $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Réponse. $z_{\text{p.p.v.}} = -\frac{16}{3}$, $z_{\text{p.g.v.}} = 16$.

1159. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = xy + x + y$ dans le rectangle borné par les droites $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

Réponse. $z_{\text{p.p.v.}} = 5$, $z_{\text{p.g.v.}} = 11$.

1160. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = xy$ dans le cercle $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Réponse. $z_{\text{p.p.v.}} = -\frac{1}{2}$, $z_{\text{p.g.v.}} = \frac{1}{2}$.

1161. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ dans le triangle borné par les droites $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

Réponse. $z_{\text{p.p.v.}} = 1$, $z_{\text{p.g.v.}} = 4$.

1162. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = 1 - x^2 - y^2$ dans le cercle $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$.

Réponse $z_{\text{p.p.v.}} = -2(\sqrt{2}+1) \cong -4{,}8$,

$$z_{\text{p.g.v.}} = 2(\sqrt{2}-1) \cong 0{,}8.$$

1163. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $z_{\text{p.p.v.}} = 0$; $z_{\text{p.g.v.}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

1164. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

Réponse. $z_{\text{p.p.v.}} = -3$ si $x = y = \frac{3}{2}\pi$,

$$z_{\text{p.g.v.}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ si } x = y = \frac{5}{6}\pi.$$

1165. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = \cos y \cos(x + y)$ dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Réponse. $z_{\text{p.p.v.}} = -\frac{1}{8}$; $z_{\text{p.g.v.}} = 1$.

1166. Déterminer parmi tous les triangles inscrits dans un cercle celui dont l'aire est maximum.

Réponse. Le triangle équilatéral.

1167. Déterminer parmi tous les triangles de périmètre donné celui dont l'aire est maximum.

Réponse. Le triangle équilatéral.

1168. Déterminer parmi tous les rectangles d'aire S donnée celui dont le périmètre a la plus petite valeur.

Réponse. $P_{\text{p. p. v.}} = 4\sqrt{S}$ (c'est un carré).

1169. Déterminer les cotes d'un parallélépipède rectangle d'aire totale S donnée dont le volume est maximum.

Réponse. $x = y = z$, $V_{\max} = \frac{S}{6} \cdot \sqrt{\frac{S}{6}}$.

CHAPITRE VIII

INTÉGRALES INDÉFINIES

§ 1. Intégration directe. Changement de variable et intégration par parties

1. Intégration directe. On dit que la fonction $F(x)$ est la *primitive* d'une fonction $f(x)$ si l'on a l'égalité $F'(x) = f(x)$, ou $dF(x) = f(x)\,dx$.

Si la fonction $f(x)$ admet une primitive $F(x)$, elle en admet alors une infinité, toutes ces primitives étant données par l'expression $F(x) + C$, où C est une constante.

On appelle *intégrale indéfinie* de la fonction $f(x)$ (ou de l'expression $f(x)\,dx$) l'ensemble de toutes ses primitives.

On note alors:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Ici, $\int$ est le signe d'intégration; $f(x)$, la fonction sous le signe d'intégration ou fonction à intégrer; $f(x)\,dx$, l'expression sous le signe d'intégration; x, la variable d'intégration.

La recherche de l'intégrale indéfinie est appelée intégration de la fonction.

Propriétés de l'intégrale indéfinie

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, où a est une constante.

5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

6. Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ et $u = \varphi(x)$, alors $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

Table d'intégrales types

I. $\int dx = x + C$.

II. $\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$ pour $m \neq -1$.

III. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

IV. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C_1.$

V. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$

VI. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

VII. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

X. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C.$

XI. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C.$

XII. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

XIII. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

1170. Calculer l'intégrale $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx.$

Solution. En appliquant les propriétés 4 et 5, on obtient

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx = 2\int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx + 7\int x\,dx - 3\int dx.$$

On applique aux trois premières intégrales du deuxième membre la formule II et à la quatrième intégrale, la formule I:

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 7\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C.$$

1171. Calculer l'intégrale $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 \cdot dx.$

Solution. On a

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int \left(x + 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right) dx =$$

$$= \int (x + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}})\, dx = \int x\, dx + 2 \int x^{\frac{1}{6}}\, dx + \int x^{-\frac{2}{3}}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7} x \sqrt[6]{x} + 3 \sqrt[3]{x} + C.$$

1172. Calculer l'intégrale $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x}\, dx$.

Solution. On a

$$\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x}\, dx = \int (2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^x\, dx = \int 2250^x\, dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C.$$

La propriété 6 permet d'élargir dans une bonne mesure la table d'intégrales types par la méthode d'*introduction de la fonction sous le signe de différentiation.*

1173. Calculer l'intégrale $\int (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x\, dx$.

Solution. Cette intégrale peut être ramenée à la formule II, en la transformant comme suit :

$$\int (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} x\, dx = \frac{1}{2} \int (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2} \int (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot d(1 + x^2).$$

Maintenant, en tant que variable d'intégration on a l'expression $1 + x^2$ et on obtient, par rapport à cette variable, une intégrale d'une fonction puissance.

Par conséquent,

$$\int (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{1}{3} (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

1174. Calculer l'intégrale $\int (x^2 - 3x + 1)^{10} \cdot (2x - 3)\, dx$.

Solution. Dans ce cas, en opérant de même que dans l'exemple précédent, on a

$$\int (x^2 - 3x + 1)^{10} \cdot d(x^2 - 3x + 1) = \frac{1}{11} (x^2 - 3x + 1)^{11} + C.$$

1175. Calculer l'intégrale $\int (\ln t)^4 \cdot \frac{dt}{t}$.

Solution. L'expression $\frac{dt}{t}$ peut être écrite sous la forme $d(\ln t)$, d'où il vient

$$\int (\ln t)^4 \cdot d(\ln t) = \frac{1}{5} (\ln t)^5 + C.$$

1176. Calculer l'intégrale $\int e^{3\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

Solution. L'intégrale donnée peut être ramenée à la forme:

$$\int e^{3\cos x}\cdot\sin x\,dx=\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\cdot 3\sin x\,dx,$$

mais

$$3\sin x\,dx=-d(3\cos x),$$

d'où il vient

$$\int e^{3\cos x}\cdot\sin x\,dx=-\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\cdot d(3\cos x),$$

c'est-à-dire que la variable d'intégration est $3\cos x$. Par conséquent, on déduit l'intégrale de la formule VI:

$$\int e^{3\cos x}\cdot\sin x\,dx=-\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}+C.$$

1177. Calculer l'intégrale $\int(2\sin x+3\cos x)\,dx$.

Solution. On trouve

$$\int(2\sin x+3\cos x)\,dx=2\int\sin x\,dx+3\int\cos x\,dx=$$
$$=-2\cos x+3\sin x+C$$

(voir les formules VIII et IX).

1178. Calculer l'intégrale $\int(\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x)^2\,dx$.

Solution. On a

$$\int(\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x)^2\,dx=\int(\operatorname{tg}^2x+2\operatorname{cotg}x\cdot\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}^2x)\,dx=$$
$$=\int(\operatorname{tg}^2x+1+1+\operatorname{cotg}^2x)\,dx=\int(\operatorname{tg}^2x+1)\,dx+\int(1+\operatorname{cotg}^2x)\,dx=$$
$$=\int\sec^2x\,dx+\int\operatorname{cosec}^2x\,dx=\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x+C$$

(voir les formules X et XI).

Calculer les intégrales:

1179. $\int x\sqrt{x}\,dx$.

Réponse. $\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+C$.

1180. $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$.

Réponse. $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}+C$.

1181. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Réponse. $2\arcsin x - x + C.$

1182. $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}\,dx.$

Réponse. $\operatorname{arctg} x + x - \frac{x^3}{3} + C.$

1183. $\int e^{3x}\cdot 3^x\cdot dx.$

Réponse. $\frac{e^{3x}\cdot 3^x}{3+\ln 3} + C.$

1184. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

Réponse. $\operatorname{tg} x - x + C.$

1185. $\int (\operatorname{sh} x - \sin x)\,dx.$

Réponse. $\operatorname{ch} x + \cos x + C.$

1186. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$

Réponse. $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C.$

1187. $\int (2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{cotg} x)^2\,dx.$

Réponse. $4\operatorname{tg} x - 9\operatorname{cotg} x - x + C.$

1188. $\int x\cos(x^2)\,dx.$

Réponse. $\frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$

1189. $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x}.$

Réponse. $\ln|\ln x| + C.$

1190. $\int (ax^2+b)^{\frac{1}{3}}\cdot x\,dx.$

Réponse. $\frac{3}{8a}(ax^2+b)^{\frac{4}{3}} + C.$

1191. $\int \sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,dx.$

Réponse. $\frac{2}{3}\sin x\cdot\sqrt{\sin x} + C.$

1192. $\int \sin(a+bx)\,dx.$

Réponse. $-\frac{1}{b}\cos(a+bx) + C.$

1193. $\int \cos(\sin x)\cdot\cos x\,dx.$

Réponse. $\sin(\sin x)+C.$

2. Changement de variable dans une intégrale indéfinie. Le changement de variable dans une intégrale indéfinie s'effectue à l'aide des substitutions de deux types.

1) $x=\varphi(t)$, où $\varphi(t)$ est une fonction monotone, continûment dérivable d'une nouvelle variable t. Dans ce cas, la formule de changement de variable est:

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt;$$

2) $u=\psi(x)$, où u est une nouvelle variable. Un tel changement exige l'emploi de la formule:

$$\int f[\psi(x)]\,\psi'(x)\,dx=\int f(u)\,du.$$

1194. Calculer l'intégrale $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

S o l u t i o n. Faisons la substitution $t=\sqrt[3]{x}$, c'est-à-dire $x=t^3$. Cette substitution permet d'obtenir sous le symbole « sin » la variable d'intégration au lieu de son radical. Calculons la différentielle $dx=3t^2\,dt$. D'où l'on tire

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int \frac{3t^2\cdot\sin t}{t^2}\,dt=3\int \sin t\,dt=-3\cos t+C.$$

La réponse doit être exprimée avec l'emploi de l'ancienne variable x. En substituant dans le résultat d'intégration $t=\sqrt[3]{x}$, on obtient

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=-3\cos\sqrt[3]{x}+C.$$

1195. Calculer l'intégrale $\int (2x+1)^{20}\,dx.$

S o l u t i o n. On peut calculer cette intégrale sans effectuer le changement de variable. Il suffit là de développer l'expression $(2x+1)^{20}$ suivant la formule du binôme de Newton et d'appliquer l'intégration terme à terme. Toutefois, cette méthode nécessite des calculs encombrants. A l'aide d'un changement de variable, on arrive à ramener directement l'intégrale donnée à une intégrale type.

Posons $2x+1=t$. On a alors $2\,dx=dt$, c'est-à-dire $dx=\frac{1}{2}\,dt$. D'où l'on tire

$$\int (2x+1)^{20}\,dx=\frac{1}{2}\int t^{20}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}t^{21}+C=\frac{1}{42}(2x+1)^{21}+C.$$

D'une manière générale, si l'intégrale $\int f(x)\,dx$ est une intégrale type, alors $\int f(ax+b)\,dx$ peut être aisément calculée par la substitution $ax+b=t$.

Par exemple, appliquons cette substitution à l'intégrale

$$\int \sin(ax+b)\,dx.$$

On a $ax+b=t$, $a\,dx=dt$ et $dx=\frac{1}{a}\,dt$. Par conséquent,

$$\int \sin(ax+b)\,dx=\int \sin t\cdot\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int \sin t\,dt=-\frac{1}{a}\cos t+C.$$

En reprenant l'ancienne variable, on obtient

$$\int \sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$$

D'une façon identique, on peut montrer que

$$\int \cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C,$$

$$\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}\cdot e^{ax+b}+C,$$

etc.

En calculant l'intégrale $\int f(ax+b)\,dx$, on est autorisé à ne pas écrire la substitution elle-même $ax+b=t$. Là, il suffit de prendre en considération que $dx=\frac{1}{a}\,d(ax+b)$. Donc,

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

où F est la primitive de f.

1196. Calculer l'intégrale $\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}\,dx$.

S o l u t i o n. Posons $\sqrt{x^3+5}=t$. Alors $x^3+5=t^2$. En différentiant les deux membres de l'équation, on trouve : $3x^2\,dx=2t\,dt$. D'où l'on tire $x^2\,dx=\frac{2}{3}\,t\,dt$ et, par conséquent,

$$\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}\,dx=\int \sqrt{x^3+5}\cdot x^2\,dx=\int t\cdot\frac{2}{3}t\,dt=\frac{2}{3}\int t^2\,dt=$$
$$=\frac{2}{9}t^3+C=\frac{2}{9}(\sqrt{x^3+5})^3+C=\frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5}+C.$$

L'intégrale donnée peut être aussi calculée à l'aide de la substitution $x^3+5=t$.

Cette substitution ramène immédiatement l'intégrale donnée à une intégrale type du fait que le premier facteur (x^2) de l'expression sous le signe d'intégration ne se distingue de la dérivée de l'expression sous le radical (x^3+5) que par la présence du facteur constant $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire $x^2=\frac{1}{3}(x^3+5)'$.

D'une façon générale, si la fonction sous le signe d'intégration est le produit de deux facteurs dont l'un dépend d'une fonction $\psi(x)$, alors que l'autre est la dérivée de $\psi(x)$ (à un facteur constant près), il est bon d'effectuer un changement de variable suivant la formule $\psi(x) = t$.

1197. Calculer l'intégrale $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}\,dx$.

Solution. Ecrivons l'intégrale donnée sous la forme $\int (2\ln x + 3)^3 \frac{1}{x}\,dx$. Etant donné que la dérivée de l'expression $2\ln x + 3$ est égale à $\frac{2}{x}$ et le second facteur $\frac{1}{x}$ ne se distingue de cette dérivée que par le coefficient constant 2, il faut alors appliquer la substitution $2\ln x + 3 = t$. On a alors $2\cdot\frac{dx}{x} = dt$, $\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,dt$. Par conséquent,

$$\int (2\ln x+3)^3\cdot\frac{dx}{x} = \int t^3\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^3\,dt = \frac{1}{8}t^4 + C =$$
$$= \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + C.$$

1198. Calculer l'intégrale $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

Solution. Posons $f(x) = t$. On a alors

$$f'(x)\,dx = dt \quad \text{et} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Ainsi,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

Par exemple,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Ici, on n'écrit pas le signe de module, car $x^2+1>0$.

1199. Calculer l'intégrale $\int \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}}$.

Solution. Posons $f(x) = t$. On a alors $f'(x)\,dx = dt$ et

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

Remarquons que l'intégrale donnée aurait pu être calculée à l'aide de la substitution $\sqrt{f(x)} = t$.

1200. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ si $a \neq 0$.

Solution. Pour ramener l'intégrale donnée à une intégrale type (voir la formule IV de la table d'intégrales types), divisons

le numérateur et le dénominateur de l'expression sous le signe somme par a^2 :

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Nous avons introduit le facteur constant $\frac{1}{a}$ sous le signe de différentiation. En considérant $\frac{x}{a}$ comme la nouvelle variable, on obtient

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Nous aurions obtenu le même résultat à l'aide de la substitution $x = at$.

1201. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ lorsque $a>0$.

Solution. En divisant le numérateur et le dénominateur par a, on obtient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{a}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

En considérant $\frac{x}{a}$ comme une nouvelle variable, on a alors

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Par exemple,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-7x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{7}-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{7}}}+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{x\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+C.$$

Complétons maintenant la table d'intégrales types par les formules suivantes :

XVI. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C.$

XVII. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+C.$

XVIII. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

XIX. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

XX. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

XXI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+\lambda} \right| + C.$

XXII. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x \right| + C.$

XXIII. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \ln \left| \sec x + \operatorname{tg} x \right| + C.$

XXIV. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \left| \cos x \right| + C.$

XXV. $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln \left| \sin x \right| + C.$

Il faut connaître par cœur les formules I à XXV, car le plus grand nombre d'intégrales utilisées dans la pratique sont ramenées à des intégrales que l'on prend d'après ces formules.

1202. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

Solution. Posons $\sqrt{2x-9} = t$, alors $2x-9 = t^2$, $x = \frac{t^2+9}{2}$ et $dx = t\,dt$. On a donc

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \int \frac{t\,dt}{\frac{t^2+9}{2} \cdot t} = 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2+9}.$$

En appliquant la formule XVIII, on obtient

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

1203. Calculer l'intégrale $\int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

Solution. Posons $\cos^2 x = t$, alors $-2\cos x \cdot \sin x \, dx = dt$, c'est-à-dire $\sin 2x \, dx = -dt$, et $\int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}}$. D'après la formule XX, on trouve $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}} dx = -\arcsin \frac{t}{\sqrt{3}} + C = -\arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C$.

1204. Calculer l'intégrale $\int \left(2 \sin \frac{x}{2} + 3\right)^2 \cdot \cos \frac{x}{2} \, dx$.

Solution. Posons $2\sin\frac{x}{2}+3=t$, alors $\cos\frac{x}{2}\,dx=dt$ et, par conséquent,

$$\int\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C=$$
$$=\frac{1}{3}\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^3+C.$$

1205. Calculer l'intégrale $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$.

Solution. Posons $x^5=t$, alors $5x^4\,dx=dt$, $x^4\,dx=\frac{1}{5}dt$ et $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2}}=\frac{1}{5}\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|+C$ (voir la formule XXI). Ainsi,

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}=\frac{1}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right|+C.$$

1206. Calculer l'intégrale $\int\frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}$.

Solution. En transformant le dénominateur de la fraction, on a $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2+4}$. Posons $x^2+1=t$, alors $x\,dx=\frac{1}{2}dt$. D'où

$$\int\frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C$$

(voir la formule XVIII). Ainsi,

$$\int\frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2}+C.$$

1207. Calculer l'intégrale $\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}dx$.

Solution. Posons $e^{2x}=t$, alors $e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}dt$ et

$$\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C$$

(nous avons appliqué la formule XIX).

Ainsi,

$$\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|+C.$$

1208. Calculer l'intégrale $\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}+5}$.

Solution. En effectuant la même substitution que dans le cas précédent, on obtient

$$\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+5}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}}+C.$$

1209. Calculer l'intégrale $\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}}\,dx$.

Solution. En posant $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, on obtient

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{(\sin t+\cos t)\cdot 2t}{t\cdot\sin 2t}\,dt=\int \frac{\sin t+\cos t}{\sin t\cdot\cos t}\,dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}\right)dt=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C$$

(voir les formules XXII et XXIII).

En revenant à l'ancienne variable, on a

$$\int \frac{(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})}{\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}}\,dx=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}}{2}\right|+C.$$

Calculer les intégrales :

1210. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}\,dx$.

Réponse. $e^{\sqrt{2x-1}}+C$.

1211. $\int x^3(1-2x^4)^3\,dx$.

Réponse. $-\frac{1}{32}(1-2x^4)^4+C$.

1212. $\int \sin(2-3x)\,dx$.

Réponse. $\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C$.

1213. $\int x\cdot\operatorname{ch}(5x^2+3)\,dx$.

Réponse. $\frac{1}{10}\operatorname{sh}(5x^2+3)+C$.

1214. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.

Réponse. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

1215. $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$.

Réponse. $\frac{1}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}+C$.

1216. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$.

Réponse. $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$.

1217. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$.

Réponse. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4-1}\right|+C$.

1218. $\int \frac{\sin 4x\,dx}{\cos^4 2x+4}$.

Réponse. $-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{\cos^2 2x}{2}+C$.

1219. $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$.

Réponse. $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}\right|+C$.

1220. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$.

Indication. Présenter l'intégrale sous forme d'une somme d'intégrales.

Réponse. $\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

1221. $\int \frac{e^{x/2}\,dx}{\sqrt{16-e^x}}$.

Réponse. $2\arcsin\frac{e^{x/2}}{4}+C$.

1222. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-3x^3}}$.

Réponse. $-\frac{2}{9}\sqrt{2-3x^3}+C$.

1223. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$.

Réponse. $-5\sqrt{3-x^2}+3\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

1224. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$.

Réponse. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{4}+C$.

1225. $\int \frac{x\,dx}{2x^4+5}$.

Réponse. $\frac{1}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(x^2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)+C$.

1226. $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}\,dx$.

Réponse. $2\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{3}}\right|+C$.

3. Intégration par parties. On appelle *intégration par parties* la recherche de l'intégrale d'après la formule

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du,$$

où $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ sont des fonctions dérivables.

On utilise l'intégration par parties, par exemple, pour l'intégration de certaines fonctions transcendantes ($\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$), ainsi que des produits de fonctions algébriques et transcendantes.

1227. Calculer l'intégrale $\int \ln x \, dx$.

Solution. En comparant l'intégrale donnée au premier membre de la formule d'intégration par parties, posons $u = \ln x$, $dv = dx$. Alors $v = x$, $du = \frac{dx}{x}$.

En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx =$$
$$= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Remarquons que le résultat ne changera pas si, pour le calcul de v à partir de l'égalité $dv = dx$, on pose

$$v = x + C_1.$$

Dans ce cas, on aura :

$$\int \ln x \, dx = (x + C_1) \ln x - \int (x + C_1) \frac{dx}{x} =$$
$$= (x + C_1) \ln x - x - C_1 \ln x + C = x(\ln x - 1) + C,$$

c'est-à-dire on obtient le résultat précédent.

1228. Calculer l'intégrale $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Solution. Posons $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, alors $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. En appliquant la formule d'intégration par parties, on a

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

1229. Calculer l'intégrale $\int x \cdot \sin x \, dx$.

Solution. Posons $u = x$, $dv = \sin x \, dx$. Alors $du = dx$, $v = -\cos x$. D'où

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C.$$

Si nous avions choisi les valeurs de u et de dv d'une autre manière, précisément $u = \sin x$, $dv = x \, dx$, nous aurions obtenu $du =$

$= \cos x\,dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$, d'où

$$\int x \sin x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \cos x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \cos x\,dx$$

et nous aurions donc abouti à une intégrale plus compliquée que celle de départ, car on voit que la puissance du facteur de la fonction trigonométrique a augmenté d'une unité.

D'une façon générale, et dans bien des cas, il est recommandé de remplacer par dv les expressions facilement intégrables telles que $e^x\,dx$, $\sin x\,dx$, $\cos x\,dx$, $\sec^2 x\,dx$, etc., le facteur de ces expressions devant être remplacé par u. Si l'expression sous le signe d'intégration comprend, en tant que facteur, des fonctions telles que $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, etc., dont les intégrales ne figurent pas sur la table d'intégrales types, alors, dans la plupart des cas, il y a avantage de remplacer ces fonctions par u.

1230. Calculer l'intégrale $\int x^2 e^x\,dx$.

Solution. Posons $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$, alors $du = 2x\,dx$, $v = e^x$.

Appliquons la formule d'intégration par parties:

$$\int x^2 e^x \cdot dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx.$$

Nous sommes parvenus à diminuer la puissance de x d'une unité. Pour trouver $\int x e^x\,dx$, reprenons encore une fois l'intégration par parties. Posons $u = x$, $dv = e^x\,dx$, alors $du = dx$, $v = e^x$ et

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x\,dx\right) = x^2 e^x - 2x e^x +$$
$$+ 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

1231. Calculer l'intégrale $\int e^x \cdot \sin x\,dx$.

Solution. Posons $u = e^x$, $dv = \sin x\,dx$, alors $du = e^x\,dx$, $v = -\cos x$. Par conséquent,

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x\,dx.$$

On a l'impression que l'intégration par parties n'a pas réussi, car l'intégrale n'a pas été simplifiée. Essayons tout de même de revenir sur l'intégration par parties. Posons $u = e^x$, $dv = \cos x\,dx$, d'où $du = e^x\,dx$, $v = \sin x$, et l'on obtient

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = -e^x \cdot \cos x + \left(e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x\,dx\right),$$

c'est-à-dire,

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x\, dx.$$

Après avoir appliqué à deux reprises l'opération d'intégration par parties, nous avons de nouveau reçu dans le deuxième membre l'intégrale de départ. Ainsi, nous arrivons à l'équation à une inconnue $\int e^x \cdot \sin x\, dx$. Portons celle-ci dans le premier membre:

$$2\int e^x \cdot \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \cdot \sin x,$$

d'où l'on tire

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Dans le résultat final, à la primitive trouvée de la fonction nous avons ajouté une constante arbitraire.

1232. Calculer l'intégrale $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ si $a > 0$.

S o l u t i o n. Posons $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$, d'où vient que $du = -\frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$. Alors

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} -$$

$$- \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a}.$$

D'où

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a},$$

ou

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

1233. Etablir la formule de récurrence pour l'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$.

S o l u t i o n. L'intégrale donnée peut être transformée comme suit:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x \cdot x \cdot dx}{(x^2 + a^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int x \cdot \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Posons $u = x$, $dv = \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}$, alors $du = dx$,

$$v = \frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-n}\cdot d\,(x^2+a^2) = -\frac{1}{2\,(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}},$$

d'où

$$I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2\,(n-1)}\cdot\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right],$$

ou

$$I_n = \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{x}{2a^2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2\,(n-1)}I_{n-1},$$

c'est-à-dire,

$$I_n = \frac{x}{2a^2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

En posant $n = 2$, on obtient la valeur de l'intégrale I_2 à partir des fonctions élémentaires. En posant ensuite $n = 3$, trouvons la valeur de l'intégrale I_3 (c'est que la valeur de l'intégrale I_2 est connue). Ainsi, on peut trouver I_n pour tout entier positif n.

1234. $\int x\cdot\ln x\,dx.$

Réponse. $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$

1235. $\int \arcsin x\,dx.$

Réponse. $x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

1236. $\int x^2\cdot\operatorname{arctg} x\,dx.$

Réponse. $\frac{x^2}{3}\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + C.$

1237. $\int (x+1)\,e^x\cdot dx.$

Indication. Poser $u = x+1$.

Réponse. $xe^x + C.$

1238. $\int x^2\cdot\sin x\,dx.$

Réponse. $-x^2\cdot\cos x + 2x\cdot\sin x + 2\cos x + C.$

1239. $\int x^5\cdot e^{x^2}\,dx.$

Indication. Poser $x^2 = t$.

Réponse. $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4 - 2x^2 + 2) + C.$

1240. $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx.$

Indication. Poser $u = x^2 + 2x + 3$.

Réponse. $(x+1)^2 \sin x + 2(x+1)\cos x + C$.

1241. $\int e^{2x} \cdot \cos x\, dx$.

Réponse. $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C$.

1242. $\int \sin(\ln x)\, dx$.

Réponse. $\frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$.

1243. $\int \sin \sqrt{x}\, dx$.

Indication. Poser $\sqrt{x} = t$.

Réponse. $-2\sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$.

§ 2. Intégration des fractions rationnelles

1. Intégration des fractions élémentaires. On appelle *fraction rationnelle* une fraction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. On dit que la fraction rationnelle est *propre* lorsque le degré du polynôme $P(x)$ est inférieur à celui du polynôme $Q(x)$. Dans le cas contraire on dit qu'elle est *impropre*.

On appelle fractions *élémentaires* les fractions propres de la forme:

I. $\frac{A}{x-a}$.

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$, où m est un entier supérieur à l'unité.

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, où $\frac{p^2}{4} - q < 0$, c'est-à-dire le trinôme du second degré x^2+px+q n'a pas de racines réelles.

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, où n est un entier supérieur à l'unité et le trinôme du second degré x^2+px+q n'a pas de racines réelles.

Dans tous les quatre cas, on suppose que A, B, p, q, a sont des nombres réels. Les fractions ci-dessus seront appelées respectivement éléments simples de types I, II, III et IV.

Considérons les intégrales des éléments simples des trois premiers types. On a

I. $\int \frac{A}{x-a}\, dx = A \cdot \ln|x-a| + C$.

II. $\int \frac{A\, dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$.

III. $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$.

En effet, pour ce cas particulier d'élément simple du type III, on a

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}, \quad \text{ou} \quad x^2+px+q=t^2+a^2,$$

où $t=x+\frac{p}{2}$, $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ $\left(\text{ici } \frac{p^2}{4}-q<0\right)$, d'où

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

1244. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

Solution. On a

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25}=\int \frac{dx}{(x+3)^2+16}=\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C.$$

1245. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

Solution. On a

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

Montrons, sous une forme générale, comment s'intègre un élément simple du type III

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx.$$

Faisons apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur. Pour ce faire, mettons le numérateur $Ax+B$ sous la forme

$$Ax+B=(2x+p)\cdot\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B.$$

Alors

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}\,dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Le numérateur de la première intégrale est la dérivée du dénominateur, d'où vient que

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\ln|x^2+px+q|+C.$$

Etant donné que $x^2+px+q>0$ quelle que soit la valeur de x, on peut donc écrire cette égalité sous la forme

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\ln(x^2+px+q)+C.$$

On applique à la seconde intégrale la formule

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

On a finalement

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+$$
$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

1246. Calculer l'intégrale $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx$.

Solution. On a

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}\,dx=$$
$$=\frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx+5\int \frac{dx}{x^2-4x+8}=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+$$
$$+5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C.$$

1247. Calculer l'intégrale $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$.

Solution. On a

$$\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}=\int \frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{1}{2}}{2x^2+2x+5}\,dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}\,dx-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}=$$
$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}}=$$
$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}+C=$$
$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C.$$

1248. Calculer l'intégrale $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}\,dx$.

Solution. Opérons au préalable dans cette intégrale un changement de variable $x^2=t$, alors $2x\,dx=dt$, $x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$. Par conséquent

$$\int \frac{(2x^2+3)\,x\,dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{(2t+3)\,dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)+2}{t^2+t+1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt+\int \frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+$$

$$+\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Considérons maintenant le cas particulier d'intégrale d'un élément simple du type IV.

Dans ce cas, a lieu la formule de récurrence suivante:

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1},$$

où

$$I_n=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}\quad (n \text{ est un entier positif}).$$

Cette formule appliquée $(n-1)$ fois permet de ramener l'intégrale $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ à une intégrale type $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

1249. Calculer l'intégrale $I_3=\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Solution. Ici, $n=3$. Après avoir appliqué une fois la formule de récurrence, on obtient

$$I_3=\frac{1}{2\cdot(3-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{3-1}}+\frac{2\cdot3-3}{2\cdot3-2}\cdot I_{3-1}=\frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\,I_2.$$

Appliquons de nouveau à l'intégrale $I_2=\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ la formule de récurrence, en posant $n=2$:

$$I_2=\frac{1}{2(2-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{2-1}}+\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\,I_{2-1}=\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\,I_1=$$

$$=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Ainsi,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right] + C.$$

On a finalement

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C.$$

Montrons maintenant, sous une forme générale, comment s'intègrent. es éléments simples du type IV.

Soit à calculer $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Faisons apparaître au numérateur la dérivée du trinôme du second degré figurant au dénominateur:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}\,dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\cdot \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

La première intégrale du deuxième membre de l'égalité sera aisément trouvée par substitution $x^2 + px + q = t$, alors que la seconde sera transformée comme suit:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

En posant maintenant $x + \frac{p}{2} = t$, $dx = dt$ et en faisant $q - \frac{p^2}{4} = a^2$ on obtient

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Ainsi, l'intégration d'un élément simple du type IV peut être effectuée en appliquant la formule de récurrence.

1250. Calculer l'intégrale $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx$.

Solution. On a

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) + (2-3)}{(x^2+2x+10)^2}\,dx -$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx - \int \frac{dx}{[(x+1)^2+9]^2}.$$

Dans la première intégrale, opérons un changement de variables $x^2 + 2x + 10 = z$, $(2x + 2)\,dx = dz$, et posons dans la seconde

intégrale $x+1=t$, $dx=dt$. D'où l'on tire

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2}-\int\frac{dt}{(t^2+9)^2}=\frac{3}{2}\int z^{-2}\,dz-\int\frac{dt}{(t^2+9)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}z^{-1}-\left[\frac{1}{2(2-1)\cdot 9}\cdot\frac{t}{(t^2+9)^{2-1}}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot\int\frac{dt}{t^2+9}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2z}-\frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C.$$

En revenant à l'ancienne variable, on obtient

$$\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{(x+1)^2+9}-$$

$$-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10}-$$

$$-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

Calculer les intégrales :

1251. $\int\frac{dx}{(x-1)^4}$.

Réponse. $-\frac{1}{3(x-1)^3}+C$.

1252. $\int\frac{dx}{(2x+3)^3}$.

Réponse. $-\frac{1}{4(2x+3)^2}+C$.

1253. $\int\frac{dx}{x^2-6x+18}$.

Réponse. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3}+C$.

1254. $\int\frac{x^2\cdot dx}{x^6+2x^3+3}$.

Réponse. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^3+1}{\sqrt{2}}+C$.

1255. $\int\frac{x-2}{x^2-4x+7}\,dx$.

Réponse. $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+7)+C$.

1256. $\int\frac{5x+3}{x^2+10x+29}\,dx$.

Réponse. $\frac{5}{2}\ln(x^2+10x+29)-11\operatorname{arctg}\frac{x+5}{2}+C$.

1257. $\int\frac{x+1}{5x^2+2x+1}\,dx$.

Réponse. $\frac{1}{10}\ln(5x^2+2x+1)+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{2}+C$.

1258. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3}$.

Réponse. $\frac{x}{8(x^2+2)^2}+\frac{3x}{32(x^2+1)}+\frac{3\sqrt{2}}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

1259. $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$.

Réponse. $\frac{x-7}{8(x^2+2x+5)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$.

2. Intégration des fractions rationnelles par décomposition en éléments simples (fractions élémentaires). Avant de procéder à l'intégration d'une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il convient d'effectuer les transformations et les calculs algébriques suivants:

1) si l'on donne une fraction rationnelle impropre, il faut faire apparaître la partie entière, c'est-à-dire présenter la fraction sous la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

où $M(x)$ est un polynôme, $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ étant une fraction rationnelle propre;

2) décomposer le dénominateur de la fraction en facteurs linéaires et quadratiques:

$$Q(x)=(x-a)^m\ldots(x^2+px+q)^n\ldots,$$

où $\frac{p^2}{4}-q<0$, c'est-à-dire le trinôme x^2+px+q a des racines complexes conjuguées;

3) décomposer une fraction rationnelle propre en éléments simples:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q}+\ldots;$$

4) calculer les coefficients indéterminés $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_n, C_n, \ldots$, et pour ce faire, réduire au même dénominateur la dernière égalité, égaler entre eux les coefficients des mêmes puissances de x dans le premier et dans le deuxième membres de l'identité obtenue et résoudre le système d'équations linéaires qui en résulte par rapport aux coefficients cherchés. On peut déterminer les coefficients à l'aide d'une autre méthode, en donnant à la variable x dans l'identité obtenue des valeurs numériques arbitraires. Il est souvent utile de mettre en œuvre les deux méthodes de calcul des coefficients.

Par suite, l'intégration d'une fraction rationnelle se ramènera à la recherche des intégrales d'un polynôme et des fractions élémentaires rationnelles.

Cas 1. Le dénominateur n'a que des racines réelles distinctes, c'est-à-dire il se décompose en facteurs du premier degré non réitératifs.

1260. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx$.

Solution. Vu que chacun des binômes $x-1$, $x-2$, $x-4$ entre dans la composition du dénominateur au premier degré, la

fraction rationnelle propre donnée peut être représentée par une somme d'éléments simples du type I :

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}.$$

Faisons disparaître les dénominateurs :

$$x^2+2x+6=A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2).$$

Par conséquent,

$$x^2+2x+6=A(x^3-6x+8)+B(x^2-5x+4)+C(x^2-3x+2).$$

Groupons les termes de mêmes puissances :

$$x^2+2x+6=(A+B+C)x^2+$$
$$+(-6A-5B-3C)x+(8A+4B+2C).$$

En comparant les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -6A-5B-3C=2, \\ 8A+4B+2C=6, \end{cases}$$

à partir duquel on trouve : $A = 3$, $B = -7$, $C = 5$.

Ainsi, la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples est de la forme

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}.$$

Lors de la décomposition, les inconnues A, B, C peuvent être trouvées d'une autre manière. Après avoir fait disparaître les dénominateurs de l'égalité, on peut donner à la variable x autant de valeurs particulières qu'il y a d'inconnues dans le système d'équations. Dans notre cas, il s'agit de trois valeurs particulières.

Il est particulièrement commode de donner à x des valeurs correspondant aux racines réelles du dénominateur. Appliquons cette méthode à la résolution du présent exemple. Après avoir fait disparaître les dénominateurs, nous avons obtenu

$$x^2+2x+6=A(x-2)(x-4)+$$
$$+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2).$$

Les racines réelles des dénominateurs sont les nombres 1, 2 et 4. Posons dans cette égalité $x = 1$, alors

$$1^2+2\cdot 1+6=A(1-2)(1-4)+$$
$$+B(1-1)(1-4)+C(1-1)(1-2),$$

d'où $9 = 3A$, c'est-à-dire $A = 3$.

En posant $x = 2$, on a $14 = -2B$, c'est-à-dire $B = -7$.
En posant $x = 4$, on obtient $30 = 6C$, c'est-à-dire $C = 5$.
Par suite, on a obtenu les mêmes valeurs que par l'application de la première méthode de calcul des inconnues.
Ainsi

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-1} -$$
$$-7\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-4} = 3\ln|x-1| -$$
$$-7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C.$$

Cas 2. Les racines du dénominateur sont réelles, mais certaines d'entre elles sont multiples, c'est-à-dire que le dénominateur se décompose en facteurs du premier degré dont quelques-uns se répètent.

1261. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx$.

Solution. Au facteur $(x-1)^3$ correspondent trois éléments simples

$$\frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1},$$

alors qu'au facteur $x+3$ correspond un seul élément simple $\frac{B}{x+3}$.
Ainsi,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

Faisons disparaître les dénominateurs:

$$x^2+1 = A_1(x+3) + A_2(x-1)(x+3) +$$
$$+ A_3(x-1)^2(x+3) + B(x-1)^3.$$

Les racines réelles des dénominateurs sont les nombres 1 et -3. En posant $x = 1$, on obtient $2 = 4A_1$; $A_1 = \frac{1}{2}$. En faisant $x = -3$, on obtient $10 = -64B$; $B = -\frac{5}{32}$.

Comparons maintenant les coefficients de la puissance la plus élevée de x, c'est-à-dire les coefficients de x^3.

Dans le premier membre, le terme comportant x^3 n'existe pas, c'est-à-dire que le coefficient de x^3 est nul. Dans le deuxième membre, le coefficient de x^3 est égal à $A_3 + B$.

Ainsi, $A_3 + B = 0$ ou $A_3 - \frac{5}{32} = 0$ et $A_3 = \frac{5}{32}$.

Il reste à calculer le coefficient A_2. Pour ce faire, il faut avoir encore une équation. On peut obtenir celle-ci en comparant les coef-

ficients des mêmes puissances de x (par exemple, de x^2) ou en donnant à x une valeur numérique quelconque. Il est plus commode de choisir une valeur telle que les calculs soient réduits au minimum.

En posant par exemple $x = 0$, on obtient

$$1 = 3A_1 - 3A_2 + 3A_3 - B.$$

Il ne reste qu'à remplacer A_1, A_3 et B par leurs valeurs:

$$1 = \frac{3}{2} - 3A_2 + \frac{15}{32} + \frac{5}{32}, \quad 3A_2 = \frac{9}{8},$$

d'où

$$A_2 = \frac{3}{8}.$$

La décomposition définitive de cette fraction en éléments simples a la forme

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} + \frac{5}{32(x-1)} - \frac{5}{32(x+3)}.$$

On obtient finalement

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2} +$$
$$+ \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x+3} = -\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C.$$

Cas 3. Parmi les racines du dénominateur il y a des racines complexes simples, c'est-à-dire la décomposition du dénominateur comporte des facteurs quadratiques non réitératifs.

1262. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.

Solution. Décomposons le dénominateur en facteurs:

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Alors

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Faisons disparaître les dénominateurs:

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) +$$
$$+ Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1).$$

Les racines réelles des dénominateurs sont les nombres 0 et 1.

Pour $x = 0$, on a $1 = -A$, c'est-à-dire $A = -1$.

Pour $x = 1$, on a $1 = 3C$, c'est-à-dire $C = \frac{1}{3}$.

Ecrivons l'équation précédente sous la forme

$$1 = A(x^3 - 1) + B(x^4 - x) + C(x^4 + x^3 + x^2) +$$
$$+ Dx^4 + Ex^3 - Dx^3 - Ex^2.$$

En comparant les coefficients de x^4, x^3, x^2, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} B+C+D=0, \\ A+C+E-D=0, \\ C-E=0, \end{cases}$$

à partir duquel on trouve :

$$B=0, \quad D=-\frac{1}{3}, \quad E=\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Par conséquent,

$$\int\frac{dx}{x^5-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+$$

$$+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Cas 4. Parmi les racines du dénominateur il y a des racines complexes multiples, c'est-à-dire la décomposition du dénominateur comporte des facteurs quadratiques réitératifs.

1263. Calculer l'intégrale $\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$,

Solution. Etant donné que x^2+1 est un facteur qui intervient deux fois, on a

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

En faisant disparaître les dénominateurs, on obtient

$$x^3-2x=Ax+B+(Cx+D)(x^2+1).$$

Egalons entre eux les coefficients des mêmes puissances de x :

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=C, \\ x^2 & 0=D, \\ x & -2=A+C;\ A=-3, \\ x^0 & 0=B+D;\ B=0. \end{array}$$

Par conséquent

$$\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{-3x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = -\frac{3}{2}\int \frac{d\,(x^2+1)}{(x^2+1)^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{3}{2\,(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln\,(x^2+1) + C.$$

N o t a. On peut calculer plus facilement l'intégrale donnée en posant $x^2+1=t$.

1264. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx$.

S o l u t i o n. Extrayons les entiers de la fraction rationnelle impropre donnée :

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \hline -\;x^3 \qquad\quad +2x & x+3+\dfrac{3x+1}{x^2+2} \\ \quad 3x^2+3x+7 & \\ \quad -\;3x^2 \qquad +6 & \\ \qquad\quad 3x+1 & \end{array}$$

Ainsi,

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

D'où l'on tire

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx = \int \left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx =$$

$$= \int x\,dx + 3\int dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2+3x+$$

$$+\frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln\,(x^2+2)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

1265. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-4x+3}$.

S o l u t i o n. Extrayons les entiers de la fraction :

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x^2-4x+3 \\ \hline -\;x^2-4x+3 & 1+\dfrac{4x-3}{x^2-4x+3} \\ \quad 4x-3 & \end{array}$$

On a alors

$$\int \frac{x^2}{x^2-4x+3}\,dx = \int \left(1+\frac{4x-3}{x^2-4x+3}\right)dx = \int dx +$$

$$+\int \frac{4x-3}{x^2-4x+3}\,dx = x + \int \frac{4x-3}{x^2-4x+3}\,dx.$$

Décomposons le dénominateur de la fraction propre $\frac{4x-3}{x^2-4x+3}$ en facteurs :

$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$$

et, par conséquent,

$$\frac{4x-3}{x^2-4x+3}=\frac{4x-3}{(x-3)(x-1)}.$$

Mettons cette fraction sous la forme d'une somme d'éléments simples

$$\frac{4x-3}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}.$$

En éliminant les dénominateurs, on obtient

$$4x-3=A(x-1)+B(x-3).$$

En posant $x=1$, on obtient $1=B(-2)$, c'est-à-dire $B=-\frac{1}{2}$.

En posant $x=3$, on obtient $9=A\cdot 2$, c'est-à-dire $A=\frac{9}{2}$. D'où il vient

$$\int\frac{x^2\,dx}{x^2-4x+3}=x+\int\left(\frac{\frac{9}{2}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}\right)dx=$$

$$=x+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=x+\frac{9}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

1266. Calculer l'intégrale $\int\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx$.

S o l u t i o n. Vu que la fonction sous le signe d'intégration est une fraction propre, il faut la mettre immédiatement sous la forme d'une somme d'éléments simples. Il est facile à voir que le polynôme $x^3+6x^2+11x+6$ s'annule pour $x=-1$, donc il est divisible par $x+1$.

Opérons cette division :

$$\begin{array}{l|l}
-\;x^3+6x^2+11x+6 & x+1 \\ \cline{2-2}
\quad\;\underline{x^3+x^2} & x^2+5x+6 \\
\quad\;-\;5x^2+11x & \\
\quad\;\;\underline{5x^2+\;\;5x} & \\
\qquad\quad-\;6x+6 & \\
\qquad\quad\;\;\underline{6x+6} &
\end{array}$$

Par conséquent,

$$x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3),$$

$$\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}=\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=$$
$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}.$$

En éliminant les dénominateurs, on obtient

$$x+4=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+$$
$$+C(x+1)(x+2).$$

En posant $x=-1$, on trouve que $3=2A$, c'est-à-dire que $A=\frac{3}{2}$.

Si $x=-2$, on obtient alors $2=-B$, c'est-à-dire que $B=-2$.

Pour $x=-3$, on obtient $1=2C$, c'est-à-dire $C=\frac{1}{2}$.

Ainsi,

$$\int\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}=$$
$$=\frac{3}{2}\ln|x+1|-2\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C.$$

1267. Calculer l'intégrale $\int\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$.

S o l u t i o n. Tout d'abord, il faut faire apparaître la partie entière de la fraction:

$$\begin{array}{r|l} x^5+1 & x^4-8x^2+16 \\ \cline{2-2} -\;\; x^5-8x^3+16x & x+\dfrac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} \\ \hline 8x^3+16x+1 & \end{array}$$

Par conséquent,

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}=x+\frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}=x+\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Décomposons maintenant la fraction propre en éléments simples

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}.$$

Eliminons les dénominateurs:

$$8x^3-16x+1=A(x+2)^2+B(x-2)(x+2)^2+$$
$$+C(x-2)^2+D(x-2)^2(x+2).$$

En posant $x=2$, on obtient $33=16A$, c'est-à-dire $A=\frac{33}{16}$.

Pour $x=-2$, on obtient $-31=16C$, c'est-à-dire $C=-\frac{31}{16}$.

Lorsque $x=0$, alors $1=4A-8B+4C+8D$.

En remplaçant A et C par leurs valeurs, on trouve

$$1=\frac{33}{4}-8B-\frac{31}{4}+8D, \quad \text{ou} \quad -16B+16D=1.$$

Pour trouver B et D, établissons encore une équation. Comparons les coefficients de x^3:

$$8=B+D.$$

En résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} B+D=8, \\ -16B+16D=1, \end{cases}$$

on obtient

$$D=\frac{129}{32}, \quad B=\frac{127}{32}.$$

Ainsi,

$$\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}\,dx=\int\left[x+\frac{\frac{33}{16}}{(x-2)^2}+\frac{\frac{127}{32}}{x-2}+\frac{-\frac{31}{16}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{129}{32}}{x+2}\right]dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{33}{16(x-2)}+\frac{127}{32}\ln|x-2|+\frac{31}{16(x+2)}+\frac{129}{32}\ln|x+2|+C.$$

1268. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}\,dx$.

S o l u t i o n. Décomposons la fraction sous le signe d'intégration en éléments simples:

$$\frac{x^3+x+1}{x^4-81}=\frac{x^3+x+1}{(x-3)(x+3)(x^2+9)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+9},$$

d'où

$$x^3+x+1=A(x+3)(x^2+9)+B(x-3)(x^2+9)+$$
$$+(Cx+D)(x-3)(x+3).$$

Pour $x=3$, on a $31=108A$; $A=\frac{31}{108}$.

Pour $x=-3$, on a $-29=-108B$; $B=\frac{29}{108}$.

Pour $x=0$, on a $1=27A-27B-9D$.

En remplaçant A et B par leurs valeurs, on obtient:

$$1=\frac{31}{4}-\frac{29}{4}-9D; \quad D=-\frac{1}{18}.$$

Comparons les coefficients de x^3:

$$1 = A + B + C,$$

d'où

$$C = 1 - \frac{31}{108} - \frac{29}{108} = \frac{4}{9}.$$

Ainsi,

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}\,dx = \int \left(\frac{\frac{31}{108}}{x-3} + \frac{\frac{29}{108}}{x+3} + \frac{\frac{4}{9}x - \frac{1}{18}}{x^2+9}\right) dx =$$

$$= \frac{31}{108}\ln|x-3| + \frac{29}{108}\ln|x+3| + \frac{2}{9}\int \frac{2x\,dx}{x^2+9} - \frac{1}{18}\int \frac{dx}{x^2+9} =$$

$$= \frac{31}{108}\ln|x-3| + \frac{29}{108}\ln|x+3| + \frac{2}{9}\ln(x^2+9) - \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

1269. Calculer l'intégrale $\int \frac{\frac{19}{16}x^2+x+1}{(x^2+4)(x^2+2x+5)}\,dx$.

Solution. On a

$$\frac{\frac{19}{16}x^2+x+1}{(x^2+4)(x^2+2x+5)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5},$$

ou

$$\frac{19}{16}x^2+x+1 = (Ax+B)(x^2+2x+5) + (Cx+D)(x^2+4).$$

En comparant les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient $A + C = 0$, $2A + B + D = \frac{19}{16}$, $5A + 2B + 4C = 1$, $5B + 4D = 1$. En résolvant le système, on trouve

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = -\frac{1}{16}.$$

Ainsi,

$$\int \frac{\frac{19}{16}x^2+x+1}{(x^2+4)(x^2+2x+5)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{x^2+4}\,dx -$$

$$- \int \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x\,dx}{x^2+4} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+4} -$$

$$- \frac{1}{4}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \frac{7}{16}\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\ln(x^2+4) +$$

$$+ \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln(x^2+2x+5) + \frac{7}{16}\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+4}{x^2+2x+5} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{7}{32}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

1270. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^5}$.

Solution. La fonction $\frac{x^2}{(x-1)^5}$ sous le signe d'intégration est une fraction rationnelle propre et l'intégrale aurait pu être calculée en mettant cette fraction sous la forme d'une somme d'éléments simples. Toutefois, on peut simplifier nettement le calcul de l'intégrale, si l'on opère un changement de variable $x-1=t$. Alors $x=t+1$ et $dx=dt$. Par suite, on obtient

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^5}=\int \frac{(t+1)^2\cdot dt}{t^5}=\int \frac{t^2+2t+1}{t^5}\,dt=\int \frac{dt}{t^3}+2\int \frac{dt}{t^4}+$$
$$+\int \frac{dt}{t^5}=-\frac{1}{2t^2}-\frac{2}{3t^3}-\frac{1}{4t^4}+C=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{2}{3(x-1)^3}-$$
$$-\frac{1}{4(x-1)^4}+C=-\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4}+C.$$

1271. Calculer l'intégrale $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}$.

Solution. Transformons le dénominateur: $x^4+6x^2+5=(x^2+3)^2-4$. On a donc

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}=\int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^2-4}.$$

Opérons un changement de variable $x^2+3=t$, alors $2x\,dx=dt$ et, par conséquent,

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}=\int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^2-4}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\frac{|x^2+1}{x^2+5}+C.$$

Les deux derniers exemples étant à l'appui, on voit que, parfois, avant de procéder à l'intégration d'une fraction rationnelle, il convient d'opérer un changement de variable.

Calculer les intégrales:

1272. $\int \frac{x+2}{x(x-3)}\,dx$.

Réponse. $-\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-3|+C$.

1273. $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$.

Réponse. $-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+3\ln|x+2|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

1274. $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}\,dx$.

Réponse. $\frac{1}{2(x-1)^2}+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$.

1275. $\int \frac{dx}{x^3-8}$.

Réponse. $\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$.

1276. $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$.

Réponse. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x(x-2)}+C$.

1277. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$.

Réponse. $\frac{1}{16}\ln\frac{x^2+1}{x^2+9}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

1278. $\int \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$.

Indication. Mettre le dénominateur sous la forme $x^4+4=$ $=(x^2+2)^2-4x^2$.

Réponse. $\frac{1}{2}[\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}(x+1)]+C$.

1279. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}\,dx$.

Réponse. $\frac{x^2}{2}+7x+\frac{75}{2}\ln|x-5|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$.

1280. $\int \frac{x^4}{x^4-16}\,dx$.

Réponse. $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

1281. $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx$.

Réponse. $3x+\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$.

§ 3. Intégration des fonctions irrationnelles élémentaires

1. Intégrales du type

$$\int R\left[x,\ (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},\ (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right]dx,$$

où R est une fonction rationnelle; m_1, n_1, m_2, n_2, . . . sont des entiers. La substitution $ax+b=t^s$, où s est le plus petit commun multiple des nombres n_1, n_2, . . . transforme l'intégrale donnée en une intégrale d'une fonction rationnelle.

1282. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

Solution. Ici $n_1=3$, $n_2=2$, d'où $s=6$. Effectuons la substitution $2x+1=t^6$, alors $x=\frac{1}{2}(t^6-1)$ et $dx=3t^5\,dt$:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}=\int \frac{3t^5\,dt}{t^4-t^3}=3\int \frac{t^2\,dt}{t-1}=$$

$$=3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt=3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C.$$

Revenons à la variable initiale. Vu que $t=(2x+1)^{\frac{1}{6}}$, alors

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}}+$$

$$+3(2x+1)^{\frac{1}{6}}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$$

2. Intégrales du type $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

De telles intégrales se ramènent aux intégrales types XX ou XXI en faisant ressortir un carré parfait du trinôme du second degré.

1283. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Solution. Transformons le trinôme du second degré:

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4.$$

Alors

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$$

1284. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Solution. On a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C.$$

3. Intégrales du type $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. Pour calculer cette intégrale, faisons apparaître au numérateur la dérivée du trinôme du second degré figurant sous le signe du radical, et décomposons l'intégrale en une somme de deux intégrales :

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

La première des intégrales obtenues est une intégrale type XVII, alors que la seconde a été déjà examinée au p. 2.

1285. Calculer l'intégrale $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx$.

Solution. Faisons apparaître au numérateur la dérivée de l'expression figurant sous le signe du radical :

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx =$$
$$= \frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} =$$
$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} =$$
$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C.$$

1286. Calculer l'intégrale $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx$.

Solution. On a

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx =$$
$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx + 13\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} =$$
$$= -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13\arcsin(x-3) + C.$$

4. Intégrales du type $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. La substitution $x-\alpha = \frac{1}{t}$ ramène cette intégrale à celle qui a été examinée au p. 2.

1287. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Solution. Posons $x=\frac{1}{t}$, alors $dx=-\frac{dt}{t^2}$ et, par conséquent,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}=-\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}}=-\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C.$$

1288. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

Solution. Posons $x-1=\frac{1}{t}$, alors $x=\frac{1}{t}+1$ et $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}=-\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{t\sqrt{-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+3}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|+C.$$

1289. Calculer l'intégrale $\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx$.

Solution. Faisons ressortir $x+1$ de la fonction linéaire du numérateur :

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx=\int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx.$$

Décomposons l'intégrale en une somme de deux intégrales :

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

Appliquons à la première intégrale la formule XXI et effectuons la substitution $x+1=\frac{1}{t}$ dans la seconde :

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx = 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| +$$

$$+\int \frac{\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}} = 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| +$$

$$+\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right| +$$

$$+C = 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right| + C.$$

5. Intégrales du type $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n. L'intégrale de ce type se calcule à l'aide de l'identité

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

où $Q_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $(n-1)$ à coefficients indéterminés, λ étant un certain nombre.

En dérivant l'identité en question et en réduisant le résultat au même dénominateur, on obtient l'égalité de deux polynômes à partir de laquelle on peut déterminer les coefficients du polynôme $Q_{n-1}(x)$ et le nombre λ.

1290. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

Solution. Ici, $n=3$, d'où vient que l'identité correspondante est de la forme

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx =$$

$$= (b_0x^2+b_1x+b_2)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

En dérivant les deux membres de l'identité, on obtient

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2b_0x+b_1)\sqrt{x^2+2x+2} +$$

$$+ (b_0x^2+b_1x+b_2)\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Faisons disparaître les dénominateurs:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (2b_0x + b_1)(x^2 + 2x + 2) + \\ + (b_0x^2 + b_1x + b_2)(x + 1) + \lambda,$$

ou

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 3b_0x^3 + (5b_0 - 2b_1)x^2 + \\ + (4b_0 + 3b_1 + b_2)x + (2b_1 + b_2 + \lambda).$$

En comparant les coéfficients des mêmes puissances de x, on obtient:

$$\begin{cases} 3b_0 = 1, \\ 5b_0 + 2b_1 = 2, \\ 4b_0 + 3b_1 + b_2 = 3, \\ \qquad 2b_1 + b_2 + \lambda = 4. \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve $b_0 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{1}{6}$, $b_2 = \frac{7}{6}$, $\lambda = \frac{5}{2}$.

Par conséquent,

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right) \times \\ \times \sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C.$$

Calculer les intégrales:

1291. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}$.

Réponse. $-\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C$.

1292. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Réponse. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$.

1293. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$.

Réponse. $\ln\left|x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x-1}\right| + C$.

1294. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$.

Réponse. $\arcsin\frac{x+1}{3} + C$.

1295. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,dx.$

Réponse. $-5\sqrt{-x^2+4x+5}+13\arcsin\frac{x-2}{3}+C.$

1296. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx.$

Réponse. $3\sqrt{x^2+x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C.$

1297. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}.$

Réponse. $-\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{3}}+C.$

1298. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}.$

Réponse. $\sqrt{\frac{x}{x+2}}+C.$

1299. $\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

Réponse. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\sqrt{2}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{2(x+1)}\right|+C.$

1300. $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx.$

Réponse. $-\left(\frac{1}{2}x+5\right)\sqrt{-x^2+4x}+13\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$

6. Intégrales des binômes différentiels $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, où m, n, p sont des nombres rationnels. P. Tchébychev a démontré que les intégrales des binômes différentiels ne peuvent être exprimées par des fonctions élémentaires que dans les trois cas suivants:

1) p est un nombre entier; dans ce cas, le changement de variable $x=t^s$, où s est le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions m et n, ramène l'intégrale proposée à une intégrale d'une fonction rationnelle;

2) $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier; ici, le changement de variable $a+bx^n=t^s$, où s est le dénominateur de la fraction p, ramène l'intégrale en question à une intégrale d'une fonction rationnelle;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ est un nombre entier; dans ce cas, le changement de variable $ax^{-n}+b=t^s$, où s est le dénominateur de la fraction p, mène au même but.

1301. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$.

Solution. Ici, la fonction sous le signe d'intégration peut être écrite comme suit: $x^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^{\frac{1}{4}}+1)^{-10}$, c'est-à-dire $p=-10$ est un nombre entier. Par conséquent, il s'agit du premier cas d'intégration d'un binôme différentiel. C'est pourquoi opérons le changement de variable $x=t^4$.

Dans ces conditions, $dx=4t^3\,dt$ et l'intégrale cherchée prend la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}=\int \frac{4t^3\,dt}{t^2\,(t+1)^{10}}=4\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}}.$$

La dernière intégrale se calcule comme suit:

$$\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}}=\int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}\,dt=\int \frac{dt}{(t+1)^9}-\int \frac{dt}{(t+1)^{10}}=$$

$$=\int (t+1)^{-9}\cdot d(t+1)-\int (t+1)^{-10}\cdot d(t+1)=$$

$$=-\frac{1}{8\,(t+1)^8}+\frac{1}{9\,(t+1)^9}+C.$$

Ainsi,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}=-\frac{1}{2\,(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\frac{4}{9\,(\sqrt[4]{x}+1)^9}+C.$$

1302. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$.

Solution. On a

$$\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\int x^3\,(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$$

Ici, $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$. Vu que $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ est un nombre entier, alors l'intégrale donnée se ramène, par changement de variable $a^2-x^2=t^2$, à une intégrale d'une fonction rationnelle de la variable t. On trouve

$$-2x\,dx=2t\,dt,\quad x\,dx=-t\,dt,\quad x^2=a^2-t^2,$$

$$\int x^3\,(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx=-\int (a^2-t^2)\cdot t^{-3}\cdot t\,dt=$$

$$=-\int \frac{a^2-t^2}{t^2}\,dt=\int dt-a^2\int \frac{dt}{t^2}=$$

$$=t+\frac{a^2}{t}+C=\frac{t^2+a^2}{t}+C=\frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

1303. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Solution. Ici, $m=-4$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$ et $\frac{m+1}{n}+p=$ $=\frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2$ est un nombre entier. Par conséquent, nous avons le troisième cas d'intégrabilité d'un binôme différentiel.

Posons $x^{-2}+1=t^2$, alors $-2x^{-3}\,dx=2t\,dt$; $x^{-3}\,dx=-t\,dt$.

Transformons l'intégrale comme suit:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\int x^{-4}\left[x^2(x^{-2}+1)\right]^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-2}(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-3}\,dx=$$

$$=-\int (t^2-1)\,t^{-1}\cdot t\,dt=-\int (t^2-1)\,dt=$$

$$=t-\frac{t^3}{3}+C=\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{\sqrt{(x^{-2}+1)^3}}{3}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+C=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$$

Calculer les intégrales:

1304. $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x+1})^2}$.

Réponse. $\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}}+\ln\frac{x}{(\sqrt[3]{x}+1)^3}+C$.

1305. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$.

Réponse. $4\sqrt{\sqrt{x}+1}\cdot\left[\frac{1}{5}(\sqrt{x}+1)^2-\frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)+1\right]+C$.

1306. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Réponse. $\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$,

où $t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

1307. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

Réponse. $\frac{1}{3}\ln\frac{(\sqrt{1+x^3}-1)^2}{|x^3|}+C$.

1308. $\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}\,dx.$

Réponse. $\frac{1}{10}\left(5x^{\frac{4}{3}}+3\right)^{\frac{3}{2}}+C.$

1309. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}.$

Réponse. $-\frac{1}{4}\cdot\frac{(2-x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^2}+C.$

§ 4. Intégration des fonctions trigonométriques

1. Intégrales du type

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

où R est une fonction rationnelle. Les intégrales du type ci-dessus se ramènent aux intégrales de fonctions rationnelles à l'aide d'un changement de variable dit *substitution trigonométrique universelle*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$$

Par suite de ce changement de variable, on a:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\operatorname{arctg} t;\quad dt=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

1310. Calculer l'intégrale $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

S o l u t i o n. La fonction sous le signe d'intégration est une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$; effectuons le changement de variable $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, alors

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

et

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C.$$

En revenant à la variable initiale, on obtient

$$\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+C.$$

1311. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x}$.

Solution. En posant $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, on obtient

$$\int \frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(a^2+b^2)(1+t^2)-(a^2-b^2)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(at)}{(at)^2+b^2} =$$

$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{at}{b}+C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

La substitution universelle $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ conduit, dans bien des cas, à des calculs trop compliqués, car avec l'application de cette méthode, $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment en fonction de t et prennent la forme de fractions rationnelles contenant t^2.

Dans certains cas particuliers, la recherche des intégrales du type $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ peut être simplifiée.

1. Si la fonction $R(\sin x, \cos x)$ ne change pas après remplacement de $\sin x$ et $\cos x$ par $-\sin x$ et $-\cos x$ (c'est-à-dire que la période de la fonction sous le signe d'intégration n'est pas 2π, mais π), alors le changement de variable $\operatorname{tg} x = t$ (ou $\operatorname{cotg} x = t$) ramène cette intégrale à une intégrale d'une fonction rationnelle d'une variable indépendante t (voir l'exemple 1312).

2. Si la fonction $R(\sin x, \cos x)$ ne change que de signe après remplacement de x par $-x$ (c'est-à-dire qu'elle est une fonction impaire de x), alors le changement de variable $\cos x = t$ mène au même résultat (voir l'exemple 1313).

3. Si la fonction $R(\sin x, \cos x)$ ne change que de signe après remplacement de x par $\pi - x$, alors le changement de variable $\sin x = t$ mène au même but (voir l'exemple 1314).

1312. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

Solution. La fonction sous le signe d'intégration est de période π. Posons $\operatorname{tg} x = t$; $x = \operatorname{arctg} t$. Alors

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

D'où

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2} + \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t-1},$$

mais

$$\int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

On a donc

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 2 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

N o t a. Cette transformation peut être effectuée d'une manière plus simple, si l'on divise par $\cos^2 x$ le numérateur et le dénominateur de l'intégrale initiale :

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1}.$$

1313. Calculer l'intégrale $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)\,dx}{\cos 2x}$.

S o l u t i o n. Vu que le remplacement de x par $-x$ ne change que le signe de la fonction sous le signe d'intégration, on pose $\cos x = t$. D'où $\sin^2 x = 1 - t^2$; $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$, $dt = -\sin x\,dx$.

Ainsi,

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)\,dx}{\cos 2x} = \int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1} = \int \frac{(t^2-2)\,dt}{2t^2-1},$$

mais

$$\int \frac{(t^2-2)\,dt}{2t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)\,dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

N o t a. Nous recommandons à nos lecteurs de porter leur attention sur le fait que, dans le cas considéré, l'intégrale peut toujours être écrite sous la forme

$$\int R^* (\sin^2 x, \cos x) \sin x \, dx.$$

1314. Calculer l'intégrale $\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)\, dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.

S o l u t i o n. Le remplacement de x par $\pi - x$ ne change que le signe de la fonction sous le signe d'intégration. Opérons le changement de variable $\sin x = t$:

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)\, dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{\cos^2 x\,(1 + \cos^2 x)\cdot \cos x\, dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)\, dt}{t^2 - t^4}$$

(étant donné que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$; $\cos x\, dx = dt$), mais

$$\frac{(1 - t^2)(2 - t^2)}{t^2 (1 + t^2)} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1 + t^2}.$$

On a donc

$$\int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)\, dt}{t^2 (1 + t^2)} = t - \frac{2}{t} - 6 \operatorname{arctg} t + C.$$

Et, finalement,

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)\, dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \operatorname{arctg} (\sin x) + C.$$

N o t a. Nous voudrions attirer l'attention des lecteurs sur le fait que, dans le cas considéré, l'intégrale peut toujours être écrite sous la forme

$$\int R^* (\sin x, \cos^2 x) \cos x \, dx.$$

2. Intégrales du type

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx.$$

Ici, nous allons considérer deux cas qui ont une importance particulière.

C a s 1. L'un au moins des exposants m ou n est un nombre impair positif. Si n est un nombre impair positif, on pose $\sin x = t$; mais si m est un nombre impair positif, on pose alors $\cos x = t$.

1315. Calculer l'intégrale $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \, dx$.

S o l u t i o n. En posant $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$, on obtient

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x\,(1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \int t^4 (1 - t^2)^2 \cdot dt = \int t^4 \, dt - 2 \int t^6 \, dt + \int t^8 \, dt =$$

$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C =$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

1316. Calculer l'intégrale $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}$.

Solution. On a

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}\,dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-\frac{4}{3}} x\,dx =$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\cos^{-\frac{4}{3}} x \cdot \sin x\,dx.$$

En posant $\cos x = t$, $-\sin x\,dx = dt$, on obtient

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}\,dx = -\int (1-t^2)\cdot t^{-\frac{4}{3}}\,dt =$$

$$= -\int t^{-\frac{4}{3}}\,dt + \int t^{\frac{2}{3}}\,dt = 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Cas 2. **Les deux exposants m et n sont des nombres pairs positifs.**

Ici, il convient de transformer la fonction sous le signe somme à l'aide des formules

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

1317. Calculer l'intégrale $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\,dx$.

Solution. Il résulte de la première formule que

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = (\sin x \cdot \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

En appliquant maintenant la deuxième formule, on obtient

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(1-\cos 4x).$$

Ainsi,

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

1318. Calculer l'intégrale $\int \cos^6 x\,dx$.

Solution. Appliquons la troisième formule:

$$\int \cos^6 x\,dx = \int (\cos^2 x)^3\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{3}{8}\int \cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x +$$

$$+ \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx + \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\times$$

$$\times \cos 2x\,dx = \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}\int dx +$$

$$+ \frac{3}{16}\int \cos 4x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx -$$

$$- \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}\,d(\sin 2x) = \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x +$$

$$+ \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 2x -$$

$$- \frac{1}{48}\sin^3 2x + C = \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x +$$

$$+ \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

1319. Calculer l'intégrale $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx$.

Solution. On a

$$\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx = \int (\sin x\cdot\cos x)^2\cdot\cos^2 x\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\cos 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}\,d(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

3. Intégrales du type

$$\int \operatorname{tg}^m x\,dx \left(\text{ou} \int \operatorname{ctg}^m x\,dx\right),$$

où m est un nombre entier positif. En calculant ce type d'intégrales, on applique la formule

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \ (\text{ou } \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1),$$

à l'aide de laquelle on abaisse successivement la puissance de la tangente ou de la cotangente.

1320. Calculer l'intégrale $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$.

Solution. On a

$$\int \operatorname{tg}^7 x\,dx = \int \operatorname{tg}^5 x\,(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^5 x\,d(\operatorname{tg} x) -$$

$$- \int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x\,(\sec^2 x - 1)\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x\,(\sec^2 x - 1)\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

1321. Calculer l'intégrale $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$.

Solution. On a

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = \int \operatorname{ctg}^4 x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx =$$

$$= -\int \operatorname{ctg}^4 x\,d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^4 x\,dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} - \int \operatorname{ctg}^2 x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - x + C.$$

4. Intégrales du type

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\,dx \left(\text{ou} \int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x\,dx\right),$$

où n est un nombre pair positif. Ce type d'intégrales se calcule d'une manière analogue à celle indiquée au p. 3 en appliquant la formule

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad (\text{ou} \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

1322. Calculer l'intégrale $\int \operatorname{tg}^4 x \cdot \sec^6 x\, dx$.

Solution. On a

$$\int \operatorname{tg}^4 x \cdot \sec^6 x\, dx = \int \operatorname{tg}^4 x \cdot \sec^4 x \cdot \sec^2 x\, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2\, d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) +$$

$$+ 2 \int \operatorname{tg}^6 x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^9 x + C.$$

1323. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Solution. On a

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \operatorname{cosec}^4 x\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\, dx =$$

$$= \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$$

5. Intégrales du type

$$\int \sec^{2n+1} x\, dx \text{ et } \int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\, dx.$$

Les intégrales d'une puissance impaire positive de la sécante ou de la cosécante se calculent plus facilement d'après les formules de récurrence:

$$\int \sec^{2n+1} x\, dx = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \sec^{2n-1} x\, dx,$$

$$\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\, dx = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \operatorname{cosec}^{2n-1} x\, dx.$$

1324. Calculer l'intégrale $\int \operatorname{cosec}^5 x\, dx$.

Solution. En appliquant la seconde formule de récurrence et en posant $2n + 1 = 5$, c'est-à-dire pour $n = 2$, on obtient

$$\int \operatorname{cosec}^5 x\, dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4} \int \operatorname{cosec}^3 x\, dx;$$

en posant maintenant $2n + 1 = 3$, c'est-à-dire $n = 1$, on a d'après la même formule

$$\int \operatorname{cosec}^3 x\, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} x\, dx,$$

mais

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Par conséquent,

$$\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

6. Intégrales du type

$$\int \sin mx\cdot\cos nx\,dx,\quad \int \cos mx\cdot\cos nx\,dx,$$

$$\int \sin mx\cdot\sin nx\,dx.$$

Les formules trigonométriques

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

donnent la possibilité de mettre le produit de fonctions trigonométriques sous la forme d'une somme.

1325. Calculer l'intégrale $\int \sin 2x\cdot\cos 5x\,dx$.

Solution. Appliquons la première des formules indiquées:

$$\int \sin 2x\cdot\cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int[\sin 7x + \sin(-3x)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

1326. Calculer l'intégrale $\int \cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\,dx$.

Solution. Appliquons au produit $\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}$ la deuxième formule:

$$\int \cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx + \frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\,dx.$$

Appliquons de nouveau cette formule :

$$\int \cos x \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4}\, dx = \frac{1}{4}\int \left(\cos\frac{7}{4}x + \cos\frac{5}{4}x\right) dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int \left(\cos\frac{3}{4}x + \cos\frac{x}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{7}\sin\frac{7}{4}x + \frac{1}{5}\sin\frac{5}{4}x + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{4}x + \sin\frac{x}{4} + C.$$

Calculer les intégrales :

1327. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

Réponse. $\frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C$.

1328. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

Réponse. $-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}+C$.

1329. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}$.

Indication. Poser $\operatorname{ctg} x = t$.

Réponse. $-\frac{x}{17}+\frac{1}{4}\ln|\sin x|-\frac{1}{68}\ln|\sin x+4\cos x|+C$.

1330. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^2 x+\sin x}$.

Réponse. $\ln|\sin x|-\sin x+C$.

1331. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^3 x-\sin^2 x-1}$.

Réponse. $-\frac{2}{5}\ln|1-\cos x|+\frac{1}{5}\ln(\cos^2 x+2\cos x+2)-$

$-\frac{6}{5}\operatorname{arctg}(1+\cos x)+C$.

1332. $\int \sin^3 x\, dx$.

Réponse. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$.

1333. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}\, dx$.

Réponse. $\ln|\sin x|-\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^4 x+C$.

1334. $\int \sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{4}\, dx$.

Réponse. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\sin x+C$.

1335. $\int \cos^4 x\,dx.$

Réponse. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

1336. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx.$

Réponse. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x+C.$

1337. $\int \operatorname{ctg}^3 3x\,dx.$

Réponse. $\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln|\sin 3x|+C.$

1338. $\int \sec^6 x\,dx.$

Réponse. $\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\cdot\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C.$

1339. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx.$

Réponse. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C.$

1340. $\int \sec^3 x\,dx.$

Réponse. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\cdot\sec x+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

1341. $\int \operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{cosec} x\,dx.$

Réponse. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{cosec} x-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

1342. $\int \sin 3x\cdot\sin x\,dx.$

Réponse. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$

1343. $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx.$

Réponse. $\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+3\sin\frac{x}{6}+C.$

7. Substitutions trigonométriques. Les intégrales de la forme

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx,$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

se ramènent à des intégrales d'une fonction rationnelle de $\sin t$ et $\cos t$ en faisant recours à une *substitution trigonométrique* appropriée: pour la première intégrale, on pose $x = a \sin t$ (ou $x = a \cos t$); pour la deuxième, $x = a \operatorname{tg} t$ (ou $x = a \operatorname{ctg} t$); pour la troisième, $x = a \sec t$ (ou $x = a \operatorname{cosec} t$).

1344. Calculer l'intégrale $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx$.

Solution. Posons $x = a \sin t$, alors $dx = a \cos t\,dt$ et l'intégrale donnée prend la forme

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}{a\sin t}\,a\cos t\,dt =$$

$$= a\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt = a\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,dt =$$

$$= a\int \frac{dt}{\sin t} - a\int \sin t\,dt =$$

$$= a \ln|\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + a\cos t + C.$$

Pour le calcul de l'intégrale $\int \frac{dt}{\sin t}$, nous avons fait appel à la formule $\int \frac{dt}{\sin t}\,t = \ln|\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + C$, car à l'aide de cette formule il est plus facile de revenir à la variable initiale x.

On obtient donc

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = a\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t}\right| + a\cdot\cos t + C,$$

où

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = a\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

1345. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$.

Solution. Opérons un changement de variable $x = a \operatorname{tg} t$, d'où $dx = a\sec^2 t\,dt$. On obtient alors

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\sec^2 t\,dt}{a\operatorname{tg} t\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 t\,dt}{\operatorname{tg} t\cdot\sec t} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sec t}{\operatorname{tg} t}\,dt = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + C,$$

où $\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}$, par conséquent, $\operatorname{ctg} t = \frac{a}{x}$, $\operatorname{cosec} t = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$.

On obtient finalement

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x} \right| + C.$$

1346. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Solution. Opérons un changement de variable $x = a \sec t$, d'où $dx = a \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt$. On obtient alors

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a^2 \sec^2 t \cdot a \sec t \cdot \operatorname{tg} t}{\sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2}}\,dt = a^2 \int \sec^3 t\,dt.$$

Appliquons ensuite la première formule de récurrence indiquée au p. 5 pour $n = 1$:

$$\int \sec^3 t\,dt = \frac{1}{2}\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{2}\int \sec t\,dt = \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos t} =$$

$$= \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C,$$

où

$$\sec t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \frac{a}{x}, \quad \sin t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2 \sin t}{2\cos^2 t} + \frac{a^2}{2}\ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C.$$

Calculer les intégrales:

1347. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Réponse. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

1348. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$.

Réponse. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$.

1349. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

Réponse. $\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right) + C$.

§ 5. Intégration des fonctions diverses

1350. $\int \sin^2 x \cdot \sin 3x\, dx.$

Réponse. $-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{20}\cos 5x + \frac{1}{4}\cos x + C.$

1351. $\int (2x^2 - 2x + 1)\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx.$

Réponse. $-2(2x^2 + 6x + 13)\, e^{-\frac{x}{2}} + C.$

1352. $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx.$

Réponse. $-\frac{1}{4x^2}(2\ln x + 1) + C.$

1353. $\int \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg} x\, dx.$

Réponse. $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{3}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$

1354. $\int (2x^2 - 1)\cos 2x\, dx.$

Réponse. $(x^2 - 1)\sin 2x + x\cos 2x + C.$

1355. $\int x \cdot \ln^2 x\, dx.$

Réponse. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C.$

1356. $\int \frac{2e^{2x} - e^x - 3}{e^{2x} - 2e^x - 3}\, dx.$

Réponse. $x + \ln|e^x - 3| + C.$

1357. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx.$

Réponse. $(x + 1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$

1358. $\int \sqrt{2^x - 1}\, dx.$

Réponse. $\frac{2}{\ln 2}\left(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{2^x - 1}\right) + C.$

1359. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}.$

Réponse. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$

où $t^4 = 1 + x^{-4}.$

1360. $\int \sqrt{6 + 4x - 2x^2}\, dx.$

Réponse. $\sqrt{2}\left(\frac{x-1}{2} \cdot \sqrt{3 + 2x - x^2} + 2 \cdot \arcsin\frac{x-1}{2}\right) + C.$

1361. $\int e^{2x}\cdot\sin(e^x)\,dx.$

Réponse. $\sin(e^x)-e^x\cdot\cos(e^x)+C.$

1362. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{2+5\operatorname{tg}^2 x}}.$

Réponse. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}x+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\frac{2}{5}}\right|+C.$

1363. $\int \sin 2x\cdot\ln\cos x\,dx.$

Réponse. $\frac{1}{2}\cos^2 x\,(1-2\ln\cos x)+C.$

1364. $\int (x+2)\cdot\cos(x^2+4x+1)\,dx.$

Réponse. $\frac{1}{2}\sin(x^2+4x+1)+C.$

1365. $\int \frac{x\cdot\cos x}{\sin^3 x}\,dx.$

Réponse. $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x\right)+C.$

1366. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx.$

Réponse. $2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$

1367. $\int \ln(x^2+x)\,dx.$

Réponse. $x\cdot\ln(x^2+x)+\ln|x+1|-x+C.$

1368. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$

Réponse. $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$

1369. $\int \cos(\ln x)\,dx.$

Réponse. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$

1370. $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$

Réponse. $12\left[\sqrt[12]{x}+\ln\frac{(\sqrt[12]{x}-1)^2}{\sqrt[12]{x}}\right]+C.$

1371. $\int e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x\,dx.$

Réponse. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\cdot(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+C.$

1372. $\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \, dx.$

Réponse. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + C.$

1373. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}.$

Réponse. $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} x\right) + C.$

1374. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$

Réponse. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

1375. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

Réponse. $\frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C.$

CHAPITRE IX

INTÉGRALES DÉFINIES

§ 1. Calcul des intégrales définies

Soit $f(x)$ une fonction définie sur le segment $[a, b]$. Divisons le segment $[a, b]$ en n parties arbitraires par les points

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

marquons sur chacun des segments élémentaires $[x_{k-1}, x_k]$ un point arbitraire ξ_k et trouvons ensuite la longueur de chacun de ces segments:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

On appelle *somme intégrale de la fonction* $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

On appelle *intégrale définie* de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ (ou entre les bornes a et b) la limite de la somme intégrale à condition que la longueur du plus grand des segments élémentaires tende vers zéro:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$, la limite de la somme intégrale existe et est indépendante du mode de division de $[a, b]$ en segments élémentaires et du choix des points ξ_k (*théorème d'existence* d'une intégrale définie).

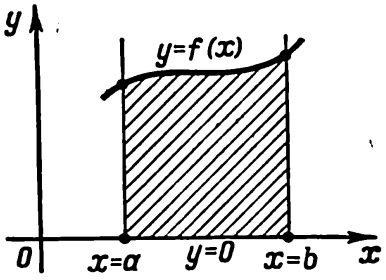


Fig. 41

Si $(x) > 0$ sur $[a, b]$, alors l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ représente géométriquement l'aire d'un *trapèze curviligne*, limité par les lignes $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (fig. 41).

Propriétés fondamentales de l'intégrale indéfinie

1) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = 0.$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

4) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$

5) $\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int_a^b f(x)\,dx$, où C est une constante.

6) *Estimation d'une intégrale définie*: si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ sur $[a, b]$, alors

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Règles de calcul des intégrales définies

1. *Formule de Newton-Leibniz*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

où $F(x)$ est la primitive de $f(x)$, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$.

2. *Intégration par parties*:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

où $u = u(x)$, $v = v(x)$ sont des fonctions continûment dérivables sur le segment $[a, b]$.

3. *Changement de variable*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

où $x = \varphi(t)$ est une fonction continue en même temps que sa dérivée $\varphi'(t)$ sur le segment $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ étant une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$.

4. Si $f(x)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$, alors

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

Si $f(x)$ est une fonction paire, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$, alors

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

1376. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^2\,dx$ en tant que limite d'une somme intégrale.

Solution. Ici $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$; divisons le segment $[0, 1]$ en n parties égales, alors

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n},$$

et choisissons $\xi_k = x_k$. On a

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{n},\quad x_2 = \frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\quad x_n = \frac{n}{n} = 1;$$

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2;\quad f(\xi_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \ldots,\ f(\xi_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2;$$

$$f(\xi_k)\,\Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ici, on a utilisé la formule de la somme des carrés des nombres naturels.

1377. Calculer $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ en appliquant la formule de Newton-Leibniz.

Solution. On a

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1378. Estimer l'intégrale $\int_{10}^{18} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Solution. Etant donné que $|\cos x| \leqslant 1$, alors, pour $x > 10$, on a l'inégalité $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\right| < 10^{-2}$. Par conséquent,

$$\left|\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx\right| < 8\cdot 10^{-2} < 10^{-1},$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx\right| < 0{,}1.$$

1379. Estimer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$.

Solution. Vu que $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, alors

$$\frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{5+3\cos^2 x} \leqslant \frac{1}{5} \text{ et } \frac{\pi}{16} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \leqslant \frac{\pi}{10}.$$

1380. Calculer $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

Solution. Utilisons la méthode d'intégration par parties. Posons $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, d'où $du = dx$, $v = -e^{-x}$. Alors

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

1381. Calculer $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

Solution. Posons $\ln x = t$; $\frac{dx}{x} = dt$; lorsque $x = 1$, alors $t = 0$; si $x = e$, alors $t = 1$. D'où il vient

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

1382. Calculer $\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$.

Solution. Posons $x = r\sin t$; $dx = r\cos t\,dt$; si $x = 0$, alors $t = 0$; si $x = r$, alors $t = \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\,r\cos t\,dt = r^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}r^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}r^2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right] = \frac{\pi r^2}{4}.$$

1383. Calculer $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cdot\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

Solution. La fonction sous le signe d'intégration $f(x) = \frac{x\cdot\sin x}{\cos^2 x}$ est paire, d'où vient que $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

Intégrons par parties, en posant $u = x$, $dv = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$; alors $du = dx$, $v = \frac{1}{\cos x}$. D'où l'on tire

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{\pi}{3\cos\frac{\pi}{3}} - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x \, dx}{\cos^2 x} = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}\right).$$

1384. Calculer $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Solution. La fonction sous le signe d'intégration $f(x) = \frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ est une fonction impaire. Par conséquent,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0.$$

1385. Calculer $\int_0^1 x \, dx$ comme la limite d'une somme intégrale.

Réponse. $\frac{1}{2}$.

1386. Calculer $\int_0^1 e^x \, dx$ comme la limite d'une somme intégrale.

Réponse. $e - 1$.

1387. Estimer l'intégrale $\int_0^1 x(1-x)^2 \, dx$.

Réponse. $0 < I \leqslant \frac{4}{27}$.

1388. Estimer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \, dx$.

Réponse. $\frac{\pi}{2} \leqslant I \leqslant \frac{e\pi}{2}$.

1389. Estimer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Réponse. $0 < I < 1$.

Calculer les intégrales :

1390. $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} \, dx$.

Réponse. $\frac{464}{15}\sqrt{2}$

1391. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4}$.

Réponse. $\frac{\pi}{8}$.

1392. $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

Réponse. $e-\sqrt{e}$.

1393. $\int\limits_0^1 e^{x+e^x}\,dx$.

Réponse. e^e-e.

1394. $\int\limits_1^e \cos\ln x\,dx$.

Réponse. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$.

1395. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx$.

Réponse. $\frac{1}{2}(\ln 3-1)$.

1396. $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$.

Réponse. $\ln 1{,}5$.

1397. $\int\limits_0^{2\pi} \cos 5x\cdot\cos x\,dx$.

Réponse. 0.

1398. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\cdot\sin 2x\,dx$.

Réponse. 2/5.

1399. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx.$

Réponse. $\frac{\pi}{2}$.

1400. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$.

Réponse. $\ln\frac{4}{3}$.

1401. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx.$

Réponse. $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$.

1402. $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1}\,dx.$

Indication. Utiliser la propriété d'une fonction impaire.
Réponse. 0.

1403. $\int\limits_{-1}^{1} x \operatorname{arctg} x\,dx.$

Indication. Utiliser la propriété d'une fonction paire.

Réponse. $\frac{\pi}{2}-1$.

1404. Montrer que

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n; \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

(m et n sont des entiers positifs).

§ 2. Intégrales impropres

1. Notions de base. On appelle *intégrales impropres*: 1) les intégrales à bornes infinies; 2) les intégrales des fonctions non bornées.

L'intégrale impropre d'une fonction $f(x)$ entre les bornes a et $+\infty$ est définie par l'égalité

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Si cette limite existe, on dit que l'intégrale impropre est *convergente*; si la limite n'existe pas, on dit que cette intégrale est *divergente*.

D'une manière analogue

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Si la fonction $f(x)$ présente une discontinuité infinie au point c du segment $[a, b]$ et est continue pour $a \leqslant x < c$ et $c < x \leqslant b$, alors, par définition,

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0} \int_{a}^{c-\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to 0} \int_{c+\beta}^{b} f(x)\,dx.$$

On dit que l'intégrale impropre $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ (où $f(c) = \infty$, $a < c < b$) est *convergente* lorsque les deux limites existent au deuxième membre de l'égalité; elle est *divergente* si l'une au moins des limites n'existe pas.

1405. Calculer l'intégrale impropre $\int_{0}^{+\infty} \cos x\,dx$ (ou établir sa divergence).

Solution. Examinons $\lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \sin x \Big|_{0}^{b} =$ $= \lim_{b\to+\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty} \sin b$. La limite n'existe pas. Par conséquent, l'intégrale impropre diverge.

1406. Calculer l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$.

Solution. On trouve $\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{a}^{-1} =$ $= \lim_{a\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1$, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = 1$ qui est une intégrale impropre convergente.

1407. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Solution. La fonction $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ sous le signe d'intégration est paire, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Alors

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b=\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$ qui est une intégrale impropre convergente.

1408. Calculer $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}$.

Solution. La fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ sous le signe d'intégration n'est pas bornée au point $x=0$. On a donc

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{a\to0}\int_{a}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{a\to0}\Big|\ln x\Big|_a^1=\lim_{a\to0}(\ln 1-\ln a)=+\infty.$$

L'intégrale impropre diverge.

1409. Calculer $\int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$.

Solution. On a

$$\int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}xe^{-x^2}\,dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

L'intégrale impropre converge.

Calculer les intégrales impropres :

1410. $\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx$.

Réponse. $\frac{\pi^2}{8}$.

1411. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$.

1412. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^5\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Réponse. $\frac{256}{15}$.

1413. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Réponse. π.

1414. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Réponse. $+\infty$.

1415. $\int\limits_{0}^{1} x \ln^2 x\,dx$.

Réponse. $\frac{1}{4}$.

2. Critères de comparaison. En étudiant la convergence des intégrales impropres, on fait appel à l'un des critères de comparaison ci-dessous.

1. *Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont définies pour tout $x \geqslant a$ et intégrables sur le segment $[a, A]$, où $A \geqslant a$, et que $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ pour tout $x \geqslant a$, alors la convergence de l'intégrale $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ entraîne la convergence de l'intégrale $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ et, dans ce cas, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.*

2. (a) *Si, pour $x \to +\infty$, la fonction $f(x) \geqslant 0$ est un infiniment petit de l'ordre $p > 0$ par rapport à $\frac{1}{x}$, alors l'intégrale $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge pour $p > 1$ et diverge pour $p \leqslant 1$.*

(b) *Si la fonction $f(x) \geqslant 0$ est définie et continue dans l'intervalle $a \leqslant x < b$ et représente un infiniment grand d'ordre p par rapport à $\frac{1}{b-x}$ pour $x \to b-0$, alors l'intégrale $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ converge pour $p < 1$ et diverge pour $p \geqslant 1$.*

1416. Discuter la convergence de l'intégrale $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Solution. On a, par définition,

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A x^{-p}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_a^A =$$

$$= \frac{1}{-p+1} \cdot \lim_{A\to+\infty} A^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot a^{-p+1}.$$

Supposons que $p > 1$; alors $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{-p+1} = 0$. Donc, pour $p > 1$, l'intégrale converge. Soit $p \leqslant 1$; alors $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{-p+1} = \infty$, c'est-à-dire, pour $p \leqslant 1$, l'intégrale $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ diverge.

1417. Discuter la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ (intégrale de Fresnel).

Solution. Soit $x = \sqrt{\tau}$, alors $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$. Mettons l'intégrale du deuxième membre sous la forme de deux intégrales :

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau.$$

Le premier terme de l'addition est une intégrale propre car $\lim\limits_{\tau\to 0} \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}} = 0$; appliquons au second l'intégration par parties, en posant $u = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$; $dv = \sin\tau\,d\tau$:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau}} = -\frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau^3}} = -\frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos\tau\,d\tau}{\tau^{\frac{3}{2}}}.$$

La dernière intégrale converge, car $\frac{\cos\tau}{\tau^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}$ et l'intégrale $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{\frac{3}{2}}}$ converge elle aussi. Etant donné le critère (2a), l'intégrale

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} dx$ converge; il en est de même donc pour l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \sin (x^2)\, dx$.

1418. Discuter la convergence de l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$.

Solution. La fonction sous le signe d'intégration $f(x) = \frac{1}{1+x^{10}}$ dans l'intervalle d'intégration est inférieure à $\varphi(x) = \frac{1}{x^{10}}$, mais l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}}$ est convergente. Par conséquent, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$ converge elle aussi.

1419. Discuter la convergence de l'intégrale $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ $(a < b)$.

Solution. On a, par définition,

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} = -\frac{1}{-p+1} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} (b-x)^{-p+1} \Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{p-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p+1} + \frac{1}{-p+1} (b-a)^{-p+1},$$

où, pour $p < 1$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p+1} = 0$.
Pour $p > 1$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p+1} = \infty$, et pour $p = 1$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln (b-x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \infty.$$

Par conséquent, pour $p < 1$ l'intégrale $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge et pour $p \geqslant 1$ elle diverge.

1420. Discuter la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$.

Solution. La fonction $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ sous le signe d'intégration est un infiniment grand pour $x\to 1$. Mettons cette fonction sous la forme:

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}},$$

c'est-à-dire l'ordre de cette fonction infiniment grande par rapport à $\frac{1}{1-x}$, pour $x\to 1$, vaut $p=\frac{1}{3}<1$. C'est pourquoi, compte tenu du critère (2b), cette intégrale converge.

1421. Discuter la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}\,dx$.

Solution. La fonction $f(x)=\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}$ sous le signe d'intégration est positive dans l'intervalle d'intégration, et, pour $x\to 0$, $f(x)\to\infty$. En faisant appel au théorème des infiniment petits équivalents, transformons le numérateur et le dénominateur de la fraction sous le signe d'intégration: on a $\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{1}{3}}$, et $e^{\sin x}-1\sim\sin x$ pour $x\to 0$, d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\infty,$$

c'est-à-dire $f(x)$ est une fonction infiniment grande d'ordre $p=\frac{2}{3}$ par rapport à $\frac{1}{x}$. Par conséquent, compte tenu du critère (2b), l'intégrale donnée converge.

Discuter la convergence des intégrales impropres suivantes:

1422. $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

Réponse. L'intégrale diverge.

1423. $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx$.

Réponse. L'intégrale converge.

1424. $\int\limits_0^\infty \frac{x\cdot\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$.

Réponse. L'intégrale diverge.

1425. $\int\limits_1^\infty \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx.$

Réponse. L'intégrale converge.

1426. $\int\limits_1^\infty \frac{1+x^2}{x^3}\,dx.$

Réponse. L'intégrale diverge.

1427. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}.$

Réponse. L'intégrale converge.

1428. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$

Réponse. L'intégrale diverge.

§ 3. Calcul des aires des figures planes

L'aire d'un trapèze curviligne limité par la courbe $y = f(x)$ $[f(x) \geqslant 0]$ et par les deux ordonnées $x = a$ et $x = b$ et par le segment $[a, b]$ de l'axe Ox se calcule d'après la formule

$$S = \int\limits_a^b y\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

L'aire de la figure limitée par les deux courbes $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ $[f_1(x) \leqslant f_2(x)]$ et par les deux verticales $x = a$ et $x = b$ se calcule d'après la formule

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Si la courbe est donnée par des équations sous forme paramétrique $x = x(t)$, $y = y(t)$, alors l'aire d'un trapèze curviligne limité par cette courbe, les ordonnées $x = a$, $x = b$ et le segment $[a, b]$ de l'axe Ox s'exprime par la formule

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt,$$

où t_1 et t_2 se déterminent à partir des équations

$$a = x(t_1), \quad b = x(t_2) \; [y(t) \geqslant 0 \text{ pour } t_1 \leqslant t \leqslant t_2].$$

L'aire d'un secteur curviligne, limité par une courbe donnée en coordonnées polaires par l'équation $\rho = \rho(\theta)$ et par les deux rayons polaires $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$, s'exprime par l'intégrale

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2\,d\theta.$$

1429. Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole $y = 4x - x^2$ et l'axe Ox.

Solution. La parabole coupe l'axe Ox aux points O (0; 0) et M (4; 0). Par conséquent, l'aire est égale à

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{32}{3}.$$

1430. Calculer l'aire de la figure plane limitée par une arche de la cycloïde $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (voir fig. 6) et l'axe Ox.

Solution. Ici $dx = 2(1 - \cos t)\,dt$ et t varient entre $t_1 = 0$ et $t_2 = 2\pi$. Par conséquent,

$$S = \int_0^{2\pi} 2^2 (1 - \cos t)^2\,dt = 4\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= 4\left[t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 12\pi.$$

1431. Trouver l'aire de la figure plane limitée par la lemniscate $\rho^2 = 2\cos 2\theta$ (voir fig. 3).

Solution. Au quadrant de l'aire cherchée correspond la variation de θ entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, d'où il vient

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\theta\,d\theta = 2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

Calculer les aires des figures limitées par les lignes données:

1432. $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$.

Réponse. $S = 4{,}5$.

1433. $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$ (I quadrant).

Réponse. $S = 18$.

1434. $y^2 = 4x^3$, $y = 2x^2$.

Réponse. $S = \frac{2}{15}$.

1435. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (I quadrant).

Réponse. $\frac{41}{2}\arcsin\frac{9}{41} + 20\ln 0{,}8$.

1436. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

Réponse. $S = \sqrt{2} - 1$.

1437. $y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=3x-\frac{1}{2}x^2.$

Réponse. $S=8.$

1438. $xy=4\sqrt{2}, \; x^2-6x+y^2=0, \; y=0, \; x=4.$

Réponse. $\frac{9\pi}{4}-\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot\ln 2-\frac{9}{2}\arcsin\frac{1}{3}.$

1439. $x=12\cos t-5\sin t, \; y=5\cos t-12\sin t.$

Réponse. $S=169\pi.$

1440. $x=a\cos^3 t, \; y=a\sin^3 t.$

Réponse. $S=\frac{3}{8}\pi a^2.$

1441. $\rho=\frac{4}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}, \; \theta=\frac{\pi}{6}, \; \theta=\frac{\pi}{3}.$

Réponse. $S=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$

1442. $\rho=a\cos\theta, \; \rho=2a\cos\theta.$

Réponse. $S=\frac{3}{2}\pi a^2.$

1443. $\rho=\sin^2\frac{\theta}{2}$ $\left(\text{à droite de la demi-droite } \theta=\frac{\pi}{2}\right).$

Réponse. $S=\frac{1}{32}(3\pi-8).$

1444. $\rho=a\sin 3\theta$ (aire d'une boucle).

Réponse. $S=\frac{\pi a^2}{12}.$

1445. $\rho=2\cos\theta, \; \rho=1$ (à l'extérieur du cercle $\rho=1$).

Réponse. $S=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$

§ 4. Calcul de la longueur d'un arc de courbe plane

Si une courbe $y=f(x)$ est régulière sur le segment $[a, b]$ (c'est-à-dire que la dérivée $y'=f'(x)$ est continue), alors la longueur de l'arc correspondant de cette courbe se calcule d'après la formule

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Si la courbe est donnée sous forme paramétrique $x=x(t)$, $y=y(t)$ [$x(t)$ et $y(t)$ étant des fonctions continûment dérivables], alors la longueur de l'arc de courbe correspondant à la variation

monotone du paramètre t entre t_1 et t_2 est exprimée par l'intégrale

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

Si une courbe régulière est donnée en coordonnées polaires par une équation de la forme $\rho=\rho(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, alors la longueur de l'arc est égale à

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta.$$

1446. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y^2=x^3$ compris entre $x=0$ et $x=1$ $(y\geqslant 0)$.

S o l u t i o n. En dérivant l'équation de la courbe, on trouve $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. La longueur de l'arc est égale à

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{27}=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right).$$

1447. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $x=\cos^5 t$, $y=\sin^5 t$ compris entre $t_1=0$ et $t_2=\frac{\pi}{2}$.

S o l u t i o n. Calculons les dérivées par rapport au paramètre t:

$$\dot{x}=-5\cos^4 t\cdot\sin t,\qquad \dot{y}=5\sin^4 t\cdot\cos t.$$

La longueur de l'arc est égale à

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-5\cos^4 t\cdot\sin t)^2+(5\sin^4 t\cdot\cos t)^2}\,dt=$$

$$=5\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\cos t\sqrt{\sin^6 t+\cos^6 t}\,dt=$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt=$$

$$= -\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\cos^2 2t}\cdot d(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{5}{8\sqrt{3}}\Big[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\cdot\sqrt{1+3\cos^2 2t}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}\cdot\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t})\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{8}\Big[2-\frac{\ln(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\Big].$$

1448. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $\rho = \sin^3\frac{\theta}{3}$ compris entre $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Solution. On a

$$\rho' = \sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}.$$

La longueur de l'arc est égale à

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6\frac{\theta}{3}+\left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\theta-\frac{3}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}(2\pi-3\sqrt{3}).$$

Calculer les longueurs des arcs des courbes:

1449. $y = \ln\sin x$, entre $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $\frac{1}{2}\ln 3$.

1450. $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$, entre les points d'intersection avec l'axe Ox.

Réponse. $\frac{20}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

1451. $y = \frac{1}{2}x^2$, entre $x = 0$ et $x = 1$.

Réponse. $\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$.

1452. $y = 1 - \ln \cos x$, entre $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{6}$.

Réponse. $\frac{1}{2} \ln 3$.

1453. $y = \operatorname{ch} x$, entre $x = 0$ et $x = 1$.
Réponse. $\operatorname{sh} 1 \cong 1{,}17$.

1454. $x = \frac{1}{3} t^3 - t$, $y = t^2 + 2$, entre $t = 0$ et $t = 3$.

Réponse. 12.

1455. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, entre $t = 0$ et $t = \ln \pi$.

Réponse. $\sqrt{2}(\pi - 1)$.

1456. $x = 8 \sin t + 6 \cos t$, $y = 6 \sin t - 8 \cos t$, entre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. 5π.

1457. $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$ (la longueur de l'arc d'une arche de cycloïde).
Réponse. 72.

1458. $\rho = \theta^2$, entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Réponse. $\frac{(\pi^2 + 4)\sqrt{\pi^2 + 4} - 8}{3}$.

1459. $\rho = a \sin \theta$.
Réponse. πa.

1460. $\rho = a \cos^3 \frac{\theta}{3}$, entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $\frac{a}{8}(2\pi + 3\sqrt{3})$.

1461. $\rho = 1 - \cos \theta$.
Réponse. 8.

§ 5. Calcul des volumes des corps

1. Calcul du volume d'un corps d'après les aires connues des sections transversales. Si l'aire d'une section d'un corps par un plan perpendiculaire à l'axe Ox peut être exprimée comme une fonction de x de la forme $S = S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, alors le volume de la partie de ce corps comprise entre les plans $x = a$ et $x = b$ perpendiculaires à l'axe Ox se calcule d'après la formule

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

2. Calcul du volume d'un corps de révolution. Si un trapèze curviligne, limité par la courbe $y = f(x)$ et les droites $y = 0$, $x = a$, $x = b$, tourne autour

de l'axe Ox, alors le volume du corps de révolution se calcule d'après la formule

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx.$$

Si la figure, limitée par les courbes $y_1 = f_1(x)$ et $y_2 = f_2(x)$ $[0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x)]$ et les droites $x = a$, $x = b$, tourne autour de l'axe Ox, alors le volume du corps de révolution est donné par la formule

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx.$$

1462. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la figure limitée par la courbe $y^2 = (x-1)^3$ et la droite $x = 2$ (fig. 42).

Solution. On a

$$V = \pi \int_1^2 y^2\,dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3\,dx = \frac{1}{4}\pi (x-1)^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4}\pi.$$

1463. Calculer le volume du corps dont la base est un triangle

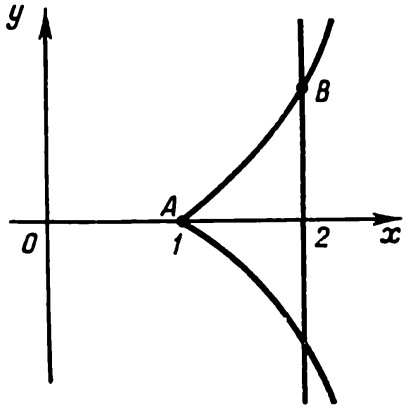


Fig. 42

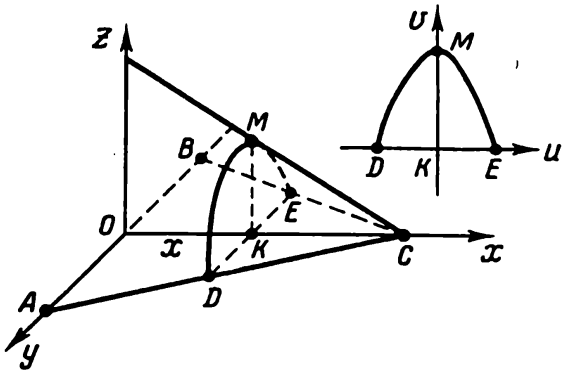


Fig. 43

isocèle de hauteur h et de base a. La section droite du corps est un segment de parabole dont la corde est égale à la hauteur du segment (fig. 43).

Solution. On a: $AB = a$, $OC = h$, $MK = DE$, $OK = x$. Exprimons l'aire de la section droite par une fonction de x, et pour ce faire, trouvons préalablement l'équation de la parabole. La corde DE de la parabole peut être trouvée à partir de la similitude des triangles correspondants, plus précisément:

$$\frac{DE}{a} = \frac{h-x}{h}, \quad DE = \frac{a(h-x)}{h} = MK.$$

Désignons cette corde par m, alors l'équation de la parabole en coordonnées uKv prendra la forme $v = m - \frac{4}{m}u^2$.

D'où l'on trouve l'aire de la section droite du corps donné:

$$S = 2\int_0^{m/2}\left(m - \frac{4}{m}u^2\right)du = \frac{2}{3}m^2,$$

ou

$$S(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{a^2(h-x)^2}{h^2}.$$

Donc,

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{h^2}(h-x)^2\,dx = \frac{2}{9}a^2h.$$

Trouver les volumes des corps engendrés par la rotation autour de l'axe Ox des figures limitées par les lignes:

1464. $y = \frac{64}{x^2+16}$, $x^2 = 8y$.

Réponse. $\frac{16}{5}\pi(5\pi+8)$.

1465. $y^2 = x$, $x^2 = y$.

Réponse. $0{,}3\pi$.

1466. $y = \sqrt{x}\cdot e^x$, $x = 1$, $y = 0$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$.

1467. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{8}x^3$.

Réponse. $\frac{4}{35}\pi$.

1468. Trouver le volume du corps limité par les plans $x = 1$, $x = 3$, si l'aire de sa section droite est inversement proportionnelle au carré de la distance de cette section à l'origine des coordonnées, pour $x = 2$, l'aire de la section étant égale à 27.

Réponse. 72.

1469. Trouver le volume d'un segment cylindrique d'après ses cotes indiquées sur la figure 44 (problème d'Archimède).

Réponse. $V = \frac{2}{3}a^2h$.

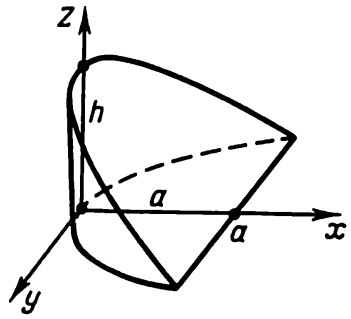


Fig. 44

1470. Dans un verre cylindrique rempli d'eau est placé un paraboloïde de révolution dont le sommet est dirigé vers le bas. La base et la hauteur du paraboloïde coïncident avec la base et la hauteur du cylindre. Trouver le volume d'eau qui reste dans le verre si la base est de rayon r et la hauteur est h.

Réponse. $\frac{1}{2}\pi r^2h$.

§ 6. Calcul de l'aire d'une surface de révolution

Si l'arc d'une courbe régulière $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ tourne autour de l'axe Ox, alors l'aire de la surface de révolution se calcule d'après la formule

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Si la courbe est donnée sous forme paramétrique par les équations $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, alors

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

1471. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation autour de l'axe Ox de l'arche de la sinusoïde $y = \sin 2x$ comprise entre $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Solution. On trouve $y' = 2\cos 2x$; alors

$$S_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\, dx.$$

Effectuons un changement de variable: $2\cos 2x = t$, $-4\sin 2x\, dx = dt$, $\sin 2x\, dx = -\frac{1}{4}\, dt$. Calculons les bornes d'intégration par rapport à t: si $x = 0$, alors $t = 2$; si $x = \frac{\pi}{2}$, alors $t = -2$.

Ainsi,

$$S = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1 + t^2}\left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}\right) = \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln\left(\sqrt{5} + 2\right)\right].$$

Calculer les aires des surfaces engendrées par la rotation autour de l'axe Ox des arcs des courbes:

1472. $y = 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$, entre $x = 0$ et $x = 2$.

Réponse. $\pi(e^2 - e^{-2} + 4)$.

1473. $y = x^3$, entre $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Réponse. $\frac{61\pi}{1728}$.

1474. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Réponse. $2\pi b\left(b + \frac{a^2}{c^2}\arcsin\frac{c}{a}\right)$, où $c^2 = a^2 - b^2$.

1475. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (l'aire de la surface engendrée par la rotation d'une arche).

Réponse. $\frac{64}{3}\pi$.

§ 7. Moments statiques et moments d'inertie des arcs et des figures plans

Soit donné dans le plan xOy un système de points matériels $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, ..., $A_n(x_n; y_n)$ de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$. On appelle *moment statique* M_x de ce système par rapport à l'axe Ox la somme des produits des masses de ces points par leurs ordonnées:

$$M_x = \sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k.$$

D'une manière analogue, on définit (comme une somme de produits des masses des points par leurs abscisses) le moment statique d'un système de points par rapport à l'axe Oy:

$$M_y = \sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k.$$

On appelle *moments d'inertie* I_x et I_y d'un système de points par rapport aux axes Ox et Oy les sommes de produits des masses des points par les carrés des distances de ces points à l'axe correspondant. Ainsi,

$$I_x = \sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k^2; \quad I_y = \sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k^2.$$

On prend pour moments statiques et moments d'inertie des arcs et des figures plans les moments correspondants des masses conventionnelles uniformément réparties sur ces arcs et ces figures avec une densité (linéaire ou superficielle) égale à l'unité.

Les moments statiques et les moments d'inertie d'un arc d'une courbe plane $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ se calculent d'après les formules

$$M_x = \int_a^b y\,dL; \quad M_y = \int_a^b x\,dL; \quad I_x = \int_a^b y^2\,dL; \quad I_y = \int_a^b x^2\,dL,$$

où $dL = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ est la différentielle de l'arc de courbe. Les moments statiques et les moments d'inertie d'un trapèze curviligne limité par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les deux droites $x = a$ et $x = b$ se trouvent d'après les

formules:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y\,dS = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad M_y = \int_a^b x\,dS = \int_a^b xy\,dx,$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3\,dx, \quad I_y = \int_a^b x^2\,dS = \int_a^b x^2 y\,dx.$$

Dans ces formules, $dS = y\,dx$ est la différentielle de l'aire d'un trapèze curviligne.

1476. Calculer le moment statique et le moment d'inertie du demi-cercle $y = \sqrt{r^2 - x^2}\,(-r \leqslant x \leqslant r)$ par rapport à l'axe Ox.

Solution. Le moment statique M_x sera calculé d'après la formule $M_x = \int_a^b y\,dL$, où $dL = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. On obtient

$$M_x = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = r\int_{-r}^{r} dx = 2r^2.$$

Le moment d'inertie I_x est calculé à l'aide de la formule

$$I_x = \int_a^b y^2\,dL = \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\sqrt{1 + \frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= r\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2r\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Opérons le changement de variable $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\,dt$; si $x = 0$, alors $t = 0$; si $x = r$, alors $t = \frac{\pi}{2}$. On obtient alors

$$I_x = 2r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\,r\cos t\,dt =$$

$$= r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = r^3\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

1477. Calculer le moment d'inertie de l'aire de l'ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ par rapport à l'axe Oy.

Solution. Le moment d'inertie de l'aire d'une ellipse par rapport à l'axe Oy est égal à $I_y = \int_{-a}^{a} x^2\,dS$, où $dS = 2y\,dx$.

Vu le fait que l'ellipse est donnée par des équations sous forme paramétrique, alors $dS = 2b \sin t \cdot a\,(-\sin t)\,dt = -2ab \sin^2 dt$, d'où l'on tire

$$I_y = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \cos^2 t\,(-2ab \sin^2 t)\,dt =$$

$$= -4a^3b \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2} a^3 b \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

1478. Calculer les moments statiques et les moments d'inertie de l'arc de l'astroïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, situé dans le Ier quadrant (fig. 45).

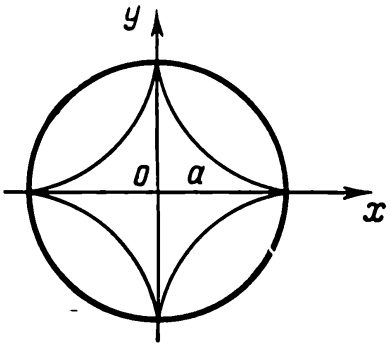


Fig. 45

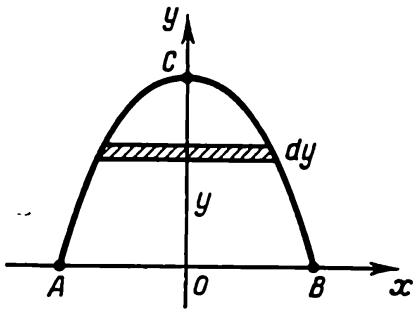


Fig. 46

Solution. Vu la symétrie de l'astroïde par rapport aux axes de coordonnées, on aura $M_x = M_y$, $I_x = I_y$. Donc, il suffit de calculer les moments par rapport à l'axe Ox.

Pour le Ier quadrant, on a $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. On trouve :

$$dL = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = 3a \sin t \cos t\,dt,$$

$$M_x = \int_a^b y\,dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t\,dt = \frac{3a^2}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5} a^2,$$

$$I_x = \int_a^b y^2\,dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t \cdot 3a \sin t \cos t\,dt = \frac{3}{8} a^3 \sin^8 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} a^3$$

Ainsi,

$$M_x = M_y = \frac{3}{5} a^2; \quad I_x = I_y = \frac{3}{8} a^3.$$

1479. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox d'un segment parabolique de corde a et de flèche h par rapport à cette corde (fig. 46).

Solution. On a $AB=a$, $OC=h$. Formons l'équation de la parabole $y=h-Nx^2$, où N est un coefficient indéterminé qui sera trouvé compte tenu du fait que le point $B\left(\frac{a}{2};\,0\right)$ se trouve sur la parabole :

$$0=h-N\cdot\frac{a^2}{4} \quad \text{ou} \quad N=\frac{4h}{a^2},$$

c'est-à-dire

$$y=h-\frac{4h}{a^2}x^2.$$

Donc,

$$I_x=\frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^3\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{a}{2}}\left(h-\frac{4h}{a^2}x^2\right)^3 dx=\frac{16}{105}ah^3.$$

1480. Calculer le moment statique et le moment d'inertie de l'arc de la chaînette $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, où $0\leqslant x\leqslant a$, par rapport à l'axe Ox.

Réponse.

$$M_x=\frac{a^2}{8}(e^2-e^{-2}+4)\,;\quad I_x=\frac{a^3}{24}(e-e^{-1})(e^2+e^{-2}+10).$$

1481. Calculer le moment statique et le moment d'inertie d'un triangle de base a et de hauteur h par rapport à sa base.

Réponse. $M_a=\frac{1}{6}ah^2$, $I_a=\frac{1}{12}ah^3$.

1482. Calculer le moment d'inertie d'un segment parabolique limité par la parabole $y=4-x^2$ et la droite $y=3$ par rapport à l'axe Ox.

Réponse. $I_x=\frac{1628}{105}$.

1483. Calculer le moment d'inertie d'un rectangle de côtés a et b par rapport à ses axes de symétrie.

Réponse. $I_x=\frac{ab^3}{12}$; $I_y=\frac{a^3b}{12}$.

1484. Calculer le moment d'inertie polaire d'un cercle de diamètre d, c'est-à-dire le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre du cercle et perpendiculaire à son plan.

Réponse. $I_0=\frac{\pi d^4}{32}$.

§ 8. Calcul des coordonnées du centre de gravité. Théorèmes de Guldin

Les coordonnées du centre de gravité d'un arc homogène d'une courbe plane $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ sont exprimées par les formules

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\,dL, \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b y\,dL,$$

où $dL = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, L étant la longueur de l'arc.

Les coordonnées du centre de gravité d'un trapèze curviligne se calculent d'après les formules:

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_a^b x\,dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{2S}\int_a^b y\,dS,$$

où $dS = y\,dx$, S étant l'aire de la figure, ou

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2\,dx.$$

Théorèmes de Guldin

Théorème 1. *L'aire de la surface engendrée par la rotation d'un arc de courbe plane autour d'un axe situé dans le plan de cette courbe et ne la traversant pas est le produit de la longueur de la courbe par la longueur du cercle décrit par le centre de gravité de l'arc de courbe.*

Théorème 2. *Le volume du corps engendré par la rotation d'une figure plane autour d'un axe situé dans le plan de la figure et ne la traversant pas est le produit de l'aire de cette figure par la longueur du cercle décrit par le centre de gravité de la figure.*

1485. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'arc de chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

Solution. Vu que la courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy, son centre de gravité se situe sur l'axe Oy, c'est-à-dire $\bar{x} = 0$. On trouve $\bar{y}$ d'après la formule $\bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b y\,dL$. On a $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$; alors

$$dL = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\,dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a}\,dx;$$

la longueur de l'arc

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\int_0^a \operatorname{ch} \frac{x}{a}\,dx = 2a \operatorname{sh} \frac{x}{a}\Big|_0^a = 2a \operatorname{sh} 1.$$

Par conséquent,

$$\bar{y}=\frac{1}{2a\,\mathrm{sh}\,1}\int_{-a}^{a} a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{1}{\mathrm{sh}\,1}\int_{0}^{a}\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\int_{0}^{a}\left(1+\mathrm{ch}\frac{2x}{a}\right)dx=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left[x+\frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\frac{2x}{a}\right]_0^a=$$

$$=\frac{a}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left(1+\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2\right),$$

ou

$$\bar{y}=\frac{a\,(2+\mathrm{sh}\,2)}{4\,\mathrm{sh}\,1}\approx 1{,}18\,a.$$

1486. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par l'arc de l'ellipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ situé dans le Ier quadrant et par les axes de coordonnées.

Solution. Dans le Ier quadrant, lorsque x croît de 0 à a, la valeur de t décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0, d'où il vient

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\int_{0}^{a} xy\,dx=\frac{1}{S}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\cos t\cdot b\sin t\,(-a\sin t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2b}{S}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t\,dt=\frac{a^2b}{S}\,\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2b}{3S}.$$

En utilisant la formule de l'aire de l'ellipse $S=\pi ab$, on obtient

$$\bar{x}=\frac{4a^2b}{3\pi ab}=\frac{4a}{3\pi}.$$

D'une manière analogue, on a

$$\bar{y}=\frac{1}{2S}\int_{0}^{a} y^2\,dx=\frac{1}{2S}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2\sin^2 t\,(-a\sin t)\,dt=$$

$$=\frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)\,d(\cos t)=\frac{2b}{\pi}\left[\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{4b}{3\pi}.$$

Ainsi, $\bar{x}=\frac{4a}{3\pi}$, $\bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$.

1487. Calculer les aires des surfaces et les volumes des anneaux (tores) engendrés par la rotation du cercle $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2$ autour des axes Ox et Oy ($a\geqslant r$, $b\geqslant r$).

S o l u t i o n. Si l'on fait tourner le cercle autour de l'axe Ox, alors le centre de gravité du cercle sera distant de b de l'axe de rotation, d'où vient que l'aire de la surface, suivant le premier théorème de Guldin, est égale à $S_x = 2\pi r \cdot 2\pi b = 4\pi^2 br$; et le volume, vu le deuxième théorème de Guldin, sera égal à $V_x = \pi r^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 br^2$.

Si la rotation s'effectue autour de l'axe Oy, la distance du centre de gravité du cercle à l'axe Oy sera égale à a. Alors

$$S_y = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar,$$

$$V_y = \pi r^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 ar^2.$$

1488. Calculer les coordonnées du centre de gravité du quart de cercle $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, en utilisant le théorème de Guldin.

S o l u t i o n. En faisant tourner le quart du cercle autour de l'axe Ox, on obtient un hémisphère dont le volume est égal à $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$. D'après le deuxième théorème de Guldin, $V = \frac{1}{4} \pi r^2 \cdot 2\pi \bar{y}$. D'où $\bar{y} = \frac{2V}{\pi^2 r^2} = \frac{2 \cdot 2\pi r^3}{3\pi^2 r^2} = \frac{4r}{3\pi}$. Le centre de gravité du quart de cercle se trouve sur l'axe de symétrie, c'est-à-dire sur la bissectrice du Ier quadrant, d'où il vient $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$.

1489. Calculer les coordonnées des centres de gravité de la demi-circonférence $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ et d'un demi-cercle limité par cette demi-circonférence et l'axe Ox.

Réponse. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$ (pour la demi-circonférence); $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$ (pour le demi-cercle).

1490. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par les lignes $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \cos x$.

Réponse. $\bar{x} = \frac{\pi - 2}{2}$, $\bar{y} = \frac{\pi}{8}$.

1491. Calculer les coordonnées du centre de gravité du segment parabolique limité par les lignes $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

Réponse. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{8}{5}$.

1492. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'arc de l'astroïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ situé dans le Ier quadrant.

Réponse. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2a}{5}$.

1493. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par les lignes $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Réponse. $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = \frac{2}{5}$.

1494. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par les lignes $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \sin x$.

Réponse. $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = \frac{\pi}{8}$.

1495. En utilisant le théorème de Guldin, calculer le volume du corps engendré par la rotation d'un demi-cercle de rayon r autour de la tangente parallèle au diamètre.

Réponse. $V = \frac{\pi r^3}{3}(3\pi - 4)$.

1496. En utilisant le théorème de Guldin, montrer que le centre de gravité d'un triangle est distant de la base de celui-ci d'un tiers de sa hauteur.

Indication. Trouver le volume du corps engendré par la rotation d'un triangle autour de sa base.

1497. En utilisant le théorème de Guldin, trouver le volume du corps engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un axe passant par son sommet et perpendiculaire à la diagonale si la longueur du rectangle est égale à 8 et sa largeur à 6.

Réponse. 480π.

§ 9. Calcul du travail et de la pression

Le *travail d'une force variable* $X = f(x)$ agissant dans la direction de l'axe Ox sur le segment $[x_0, x_1]$ se calcule d'après la formule

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Pour calculer la *pression d'un liquide* on fait appel à la loi de Pascal d'après laquelle la pression exercée par le liquide sur une surface immergée est égale au produit de l'aire S par la profondeur d'immersion h, la densité ρ et l'accélération de la pesanteur g, c'est-à-dire

$$P = \rho g h S.$$

1498. Quel travail faut-il accomplir pour allonger un ressort de 4 cm, si l'on connaît que sous l'action d'une charge de 1 N le ressort s'allonge de 1 cm?

Solution. D'après la loi de Hooke, la force X N allongeant le ressort de x m est égale à $X = kx$. Le coefficient de proportionnalité k sera trouvé de la condition : si $x = 0{,}01$ m, alors $X = 1$ N ; par conséquent, $k = \frac{1}{0{,}01} = 100$ et $X = 100x$. Alors

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08 \text{ J}.$$

1499. Quel travail faut-il accomplir à une grue pour faire sortir un pieu antichar en béton armé du fond d'un cours d'eau de 5 m de profondeur, si le pieu a la forme d'un tétraèdre équilatéral de côté 1 m, la densité du béton armé étant de 2500 kg/m³ (fig. 47)?

Solution. La hauteur du tétraèdre est $h = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ m, le volume est $V = \frac{1}{12}\sqrt{2}$ m³. Le poids du pieu dans l'eau est

$$P = \frac{1}{12}\sqrt{2}\cdot 2500\cdot 9{,}8 - \frac{1}{12}\sqrt{2}\cdot 1000\cdot 9{,}8 = $$
$$= 1225\sqrt{2}\,\text{N}$$

d'où vient que le travail nécessaire à lever le pieu jusqu'à l'apparition de son sommet à la surface de l'eau est

$$A_0 = 1225\sqrt{2}\,(5-h) =$$
$$= 1225\sqrt{2}\left(5-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \cong 7227{,}5 \text{ J}.$$

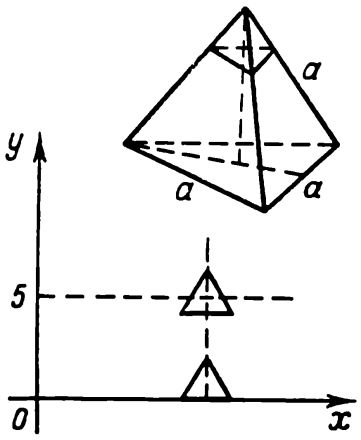


Fig. 47

Maintenant, calculons le travail A_1 qu'il faut accomplir pour faire sortir le pieu de l'eau. Soit $5 + y$ le repère atteint par le sommet du tétraèdre, alors le volume du petit tétraèdre sorti de l'eau est égal à $\frac{1}{8}y^3\cdot 3\sqrt{3}$, et le poids du tétraèdre est

$$P(y) = \frac{2500\cdot 9{,}8}{12}\sqrt{2} - \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{8}y^3 3\sqrt{3}\right)1000\cdot 9{,}8 \text{ N}.$$

Par conséquent,

$$A_1 = \int_0^h \left(\frac{24\,500}{12}\sqrt{2} - \frac{9\,800}{12}\sqrt{2} + \frac{9800}{8}3y^3\sqrt{3}\right)dy =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{6}} \left(1225\sqrt{2} + 3675\sqrt{3}\,y^3\right)dy =$$
$$= \left[1225\sqrt{2}\,y + \frac{3675}{4}\sqrt{3}\,y^4\right]_0^{\frac{1}{3}\sqrt{6}} \approx 2082{,}5 \text{ J}.$$

D'où

$$A = A_0 + A_1 = 7227{,}5 + 2082{,}5 = 9310 \text{ J} = 9{,}31 \text{ kJ}.$$

1500. Calculer le travail nécessaire à pomper l'eau d'une cuve demi-cylindrique de longueur a et de rayon r (fig. 48).

S o l u t i o n. Le volume d'une couche d'eau élémentaire, située à la profondeur x, de longueur a, de largeur $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ et d'épaisseur dx, est égal à

$$dV = am\,dx = 2a\sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Le travail élémentaire accompli pour le levage de cette couche d'eau

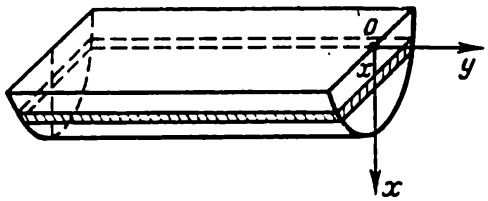


Fig. 48

à une hauteur x est égal à

$$dA = 2\rho\, gax\sqrt{r^2 - x^2}\,dx,$$

où ρ est la densité de l'eau. Par conséquent,

$$A = 2a\rho g\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -a\rho g\left[\frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r = \frac{2}{3}\rho g a r^3.$$

1501. Une conduite d'eau est de 6 cm de diamètre ; l'une de ses extrémités est raccordée à un réservoir dans lequel le niveau d'eau se situe à 100 cm au-dessus du bord supérieur de la conduite, alors que l'autre extrémité est fermée par une vanne. Calculer la pression totale exercée sur la vanne.

S o l u t i o n. La vanne représente un cercle de 3 cm de rayon. Divisons la surface de ce cercle en bandes élémentaires parallèles à la surface d'eau. L'aire de chacune de ces bandes distante de y du centre de cercle est égale (aux infiniment petits d'ordre supérieur près) à

$$dS = 2\sqrt{9 - y^2}\,dy \text{ cm}^2.$$

Calculons la pression à laquelle est soumise cette bande élémentaire :

$$dP = 2\rho g(103 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy = 1960(103 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy \text{ dynes}$$

(ici $\rho = 1$ g/cm³). Par conséquent,

$$P = 1960\int_{-3}^{3}(103 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy =$$

$$= 1960\left[103\left(\frac{y}{2}\sqrt{9 - y^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{y}{3}\right) + \frac{1}{3}(9 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{3} =$$

$$= 980 \cdot 927\pi = 908\,460\pi \text{ erg} \approx 0{,}09\pi \text{ J}.$$

1502. Calculer la pression exercée par l'eau sur une paroi verticale qui est un demi-cercle de 6 m de diamètre et qui se trouve à la surface de l'eau (fig. 49). La densité de l'eau est $\rho = 1000$ kg/m³.

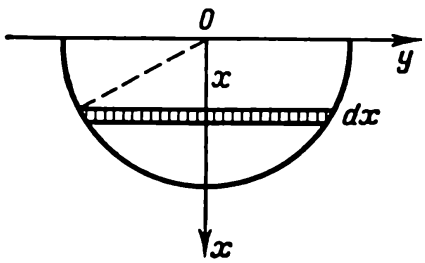


Fig. 49

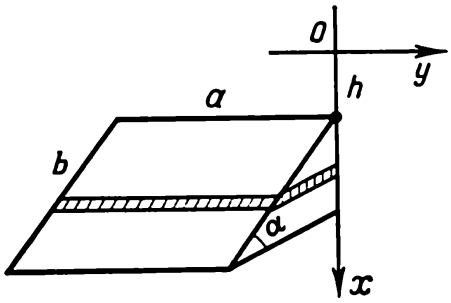


Fig. 50

S o l u t i o n. La différentielle de pression exercée sur une surface élémentaire s'exprime comme suit:

$$dP = 2\rho g x \sqrt{9 - x^2}\, dx = 19\,600 x \sqrt{9 - x^2}\, dx.$$

D'où

$$P = 19\,600 \int_0^3 x \sqrt{9 - x^2}\, dx = -\frac{19\,600}{3} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 =$$

$$= 176\,400 \text{ N} = 176{,}4 \text{ kN}.$$

1503. Calculer la pression qu'exerce l'essence sur les parois d'un réservoir cylindrique de hauteur $h = 3{,}5$ m et de rayon $r = 1{,}5$ m, si $\rho = 900$ kg/m³.

S o l u t i o n. Un élément de pression exercée sur la surface des parois dans une bande élémentaire séparée s'exprimera comme suit: $dP = \rho g \cdot 2\pi r x\, dx$. D'où

$$P = 2\pi r \rho g \int_0^h x\, dx = \rho g \pi r h^2 = 9{,}8\pi \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5^2 \cdot 900 =$$

$$= 161\,700\pi \text{ N} = 161{,}7\pi \text{ kN}.$$

1504. Quelle pression subit une plaque rectangulaire de longueur a et de largeur b ($a > b$) si elle est inclinée sous l'angle α par rapport à la surface horizontale du liquide et si son côté grand se trouve à la profondeur h (fig. 50)?

S o l u t i o n. L'aire de la bande élémentaire séparée à la profondeur x est égale à

$$dS = \frac{a \cdot dx}{\sin \alpha}.$$

Par conséquent, l'élément de pression

$$dP = a\frac{dx}{\sin\alpha}x\rho g$$

(ρ est la densité du liquide). D'où

$$P = a\rho g\int_h^{h+b\sin\alpha}\frac{x\,dx}{\sin\alpha} = \frac{a\rho g}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_h^{h+b\sin\alpha} =$$

$$= \frac{a\rho g}{2\sin\alpha}[(h^2 + 2bh\sin\alpha + b^2\sin^2\alpha) - h^2] = ab\rho g\left(h + \frac{1}{2}b\sin\alpha\right).$$

1505. Calculer la pression exercée sur une plaque ayant la forme d'un trapèze isocèle de bases a et b et de hauteur h, immergée dans un liquide à la profondeur c (fig. 51).

S o l u t i o n. L'aire de la bande élémentaire s'exprime comme suit: $dS = (a + 2l)\,dx$, où $l = \frac{b-a}{2h}(x - c)$ (l est déterminé ayant en vue la similitude des triangles). Dans ces conditions, la pression s'exprimera par l'intégrale:

$$P = \rho g\int_c^{c+h}\left[a + \frac{b-a}{h}(x-c)\right]x\,dx =$$

$$= \rho g\left[\frac{ax^2}{2} + \frac{b-a}{h}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{cx^2}{2}\right)\right]_c^{c+h} =$$

$$= \left[\frac{a+b}{2}ch + \frac{h^2}{6}(a+2b)\right]\rho g.$$

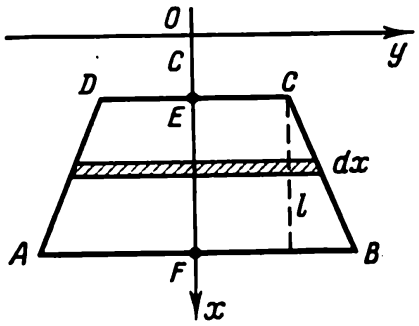


Fig. 51

1506. Calculer le travail dépensé pour pomper l'eau d'un réservoir conique dont la base est horizontale et se situe au-dessous du sommet si le cône est de hauteur h et si sa base est de rayon r.

Réponse. $A = \frac{1}{4}\pi\rho g r^2 h^2$.

1507. Soit une citerne cylindrique en cours de vidange. Quel travail faut-il accomplir pour pomper le liquide, si la citerne est de longueur a et de diamètre d?

Réponse. $A = \frac{1}{8}\pi\rho g a d^3$.

1508. Une roche de forme conique est retirée de l'eau par une grue dont le câble est fixé au sommet du cône. Quel travail faut-il accomplir pour sortir complètement la roche de l'eau si le sommet du cône se trouve à la surface de l'eau? Le cône est de rayon de base 1 m, la hauteur 3 m, la densité de la roche étant 2,5 g/cm³.

Indication. Dans ce problème $P(y) = 14\,700\pi + \frac{9800}{27}\pi y^3$N.

Réponse. $A = 51\,450\pi$J.

1509. Un cône droit en fonte de hauteur 40 cm et de rayon de base 40 cm repose au fond d'un réservoir rempli jusqu'aux bords d'huile de pétrole. Calculer le travail à accomplir pour faire sortir ce cône du réservoir si la densité de la fonte $\rho_1 = 7{,}22$ g/cm^3 et celle de l'huile de pétrole $\rho_2 = 0{,}89$ g/cm^3.

Indication. Ici, $P(y)$ est égal au poids du cône diminué du poids de la masse de pétrole déplacée par la partie immergée du cône, c'est-à-dire

$$P(y) = \frac{1}{3}\pi \cdot 40^3 \rho_1 g - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 40^3 - \frac{1}{3}\pi y^3\right)\rho_2 g \text{ dynes.}$$

Réponse. $A = 547{,}8\pi$J.

1510. Une bouteille cylindrique de diamètre 24 cm et de longueur 80 cm est remplie de gaz sous une pression de 2 kPa. Quel travail faut-il accomplir pour que, par une compression isothermique, le volume de gaz soit réduit à la moitié?

Réponse. $A \approx 50{,}7$J.

1511. Dans un liquide de densité ρ est immergée une plaque triangulaire, le sommet étant dirigé vers le haut. Calculer la pression du liquide si le triangle est de base a, de hauteur h. Le sommet du triangle se trouve à la surface du liquide.

Réponse. $P = \frac{1}{3}\rho g a h^2$.

1512. Calculer la pression de l'essence, dont est rempli un réservoir de hauteur $h = 4$ m et de rayon $r = 2$ m ($\rho = 900$ kg/m^3), sur les parois de ce réservoir à chaque mètre de profondeur.

Réponse. $P_1 = 17{,}64\pi$ kN, $P_2 = 70{,}56\pi$ kN, $P_3 = 158{,}76\pi$ kN, $P_4 = 282{,}24\pi$ kN.

1513. Dans un liquide de densité ρ est immergée une plaque circulaire de diamètre d tangente à la surface du liquide. Calculer la pression du liquide exercée sur cette plaque.

Réponse. $P = \frac{1}{8}\rho g \pi d^3$.

En formant les sommes intégrales correspondantes et en effectuant un passage à la limite, résoudre les problèmes suivants:

1514. Calculer la masse d'une tige de 100 cm de longueur, si la densité linéaire de la tige varie suivant la loi $\delta = (20x + 0{,}15x^2)$ g/cm, où x est la distance à l'une des extrémités de la tige.

Réponse. 150 kg.

1515. La vitesse d'un point varie suivant la loi $v = (100+8t)$ m/s. Quel chemin sera parcouru par ce point au cours du laps de temps [0, 10]?

Réponse. 1400 m.

1516. Un point se déplace sur l'axe Ox à partir du point M (1 ; 0) de manière que sa vitesse soit égale à l'abscisse. Quel parcours effectuera-t-il 10 s après le départ?

I n d i c a t i o n. Il faut faire appel à l'expression de la vitesse comme dérivée du chemin parcouru par rapport au temps, c'est-à-dire $v = \frac{dx}{dt}$.

Réponse. $x = e^{10}$.

1517. La vitesse dont est animé un point varie suivant la loi $v = 2(6 - t)$ m/s. Quel est le plus grand éloignement du point mobile par rapport au point de départ?

Réponse. 36 m.

CHAPITRE X

CERTAINES NOTIONS DE FONCTIONS HYPERBOLIQUES

On appelle fonctions hyperboliques les fonctions définies par les égalités:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — } \textit{sinus hyperbolique},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — } \textit{cosinus hyperbolique},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ — } \textit{tangente hyperbolique},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ — } \textit{cotangente hyperbolique}.$$

Le cosinus hyperbolique est une fonction p a i r e, c'est-à-dire ch $(-x) =$

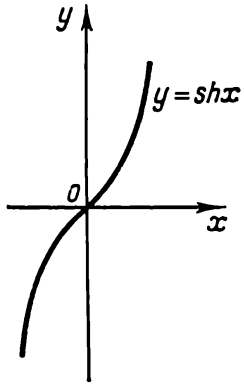


Fig. 52

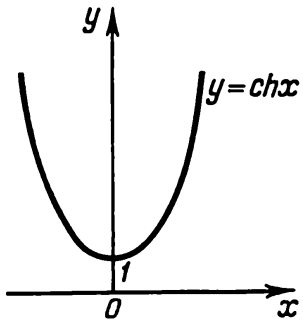


Fig. 53

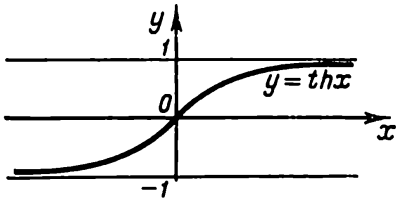


Fig. 54

$=$ ch x, alors que le sinus, la tangente et la cotangente hyperboliques sont des fonctions i m p a i r e s:

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \quad \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x.$$

Il est bon d'avoir en vue que sh $0 = 0$, ch $0 = 1$,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1.$$

Les courbes représentatives des fonctions hyperboliques $y =$ sh x, $y =$ $=$ ch x et $y =$ th x sont montrées respectivement sur les figures 52, 53 et 54.

La courbe représentative du cosinus est appelée *chaînette*. La chaînette est une ligne d'incurvation d'un fil lourd fixé en deux points.

Les dérivées des fonctions hyperboliques se calculent d'après les formules:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

L'intégration des fonctions hyperboliques se fait d'après les formules:

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

1518. Montrer que l'égalité

$$\operatorname{sh}(x+a) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} a$$

est valable.

Solution. La définition du sinus hyperbolique nous donne

$$\operatorname{sh}(x+a) = \frac{e^{x+a} - e^{-(x+a)}}{2} = \frac{e^x \cdot e^a - e^{-x} \cdot e^{-a}}{2}.$$

Vu que

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \quad e^a = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a,$$

$$e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x, \quad e^{-a} = \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a,$$

alors

$$\operatorname{sh}(x+a) = \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a) - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)}{2}.$$

A la suite des transformations algébriques appropriées on obtient:

$$\operatorname{sh}(x+a) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} a.$$

1519. Exprimer $\operatorname{ch}(x+a)$ par des fonctions hyperboliques de variables indépendantes x et a.

Solution. En dérivant par rapport à x l'égalité

$$\operatorname{sh}(x+a) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} a,$$

on obtient

$$\operatorname{ch}(x+a) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} a.$$

1520. Exprimer $\operatorname{sh} 2x$ et $\operatorname{ch} 2x$ par $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$.

Solution. On a

$$\operatorname{sh} 2x = \operatorname{sh}(x+x) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}(x+x) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

1521. Exprimer $\operatorname{ch}^2 x$ et $\operatorname{sh}^2 x$ par $\operatorname{ch} 2x$.

Solution. En résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x, \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \end{cases}$$

par rapport à $\operatorname{ch}^2 x$ et $\operatorname{sh}^2 x$, on obtient

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}.$$

1522. Exprimer les fonctions hyperboliques de variables imaginaires $\operatorname{sh} xi$ et $\operatorname{ch} xi$ par $\sin x$ et $\cos x$.

Solution. On trouve

$$\operatorname{sh} xi = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2} = i \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = i \cdot \sin x,$$

$$\operatorname{ch} xi = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \cos x.$$

Donc, $\operatorname{sh} xi = i \cdot \sin x$, $\operatorname{ch} xi = \cos x$.

1523. Quelle est la ligne définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = a \cdot \operatorname{sh} t \end{cases}$$

pour $a > 0$?

Solution. Eliminons t entre ces équations. Pour ce faire, retranchons y^2 de x^2:

$$\begin{array}{rl} & x^2 = a^2 \cdot \operatorname{ch}^2 t \\ - & y^2 = a^2 \cdot \operatorname{sh}^2 t \\ \hline & x^2 - y^2 = a^2 (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t), \end{array}$$ c'est-à-dire $x^2 - y^2 = a^2$

La courbe $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les droites $y=\pm x$. La courbe

$$\begin{cases} x=a\cdot \operatorname{ch} t, \\ y=a\cdot \operatorname{sh} t \end{cases}$$

est la branche droite de cette hyperbole, car $x=a\cdot \operatorname{ch} t>0$ pour tout t (fig. 55).

1524. On donne la branche droite de l'hyperbole équilatère

$$\begin{cases} x=a\cdot \operatorname{ch} t, \\ y=a\cdot \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

En donnant à t une valeur déterminée, on obtient sur l'hyperbole le point M. Abaissons du point M la perpendiculaire MN sur l'axe

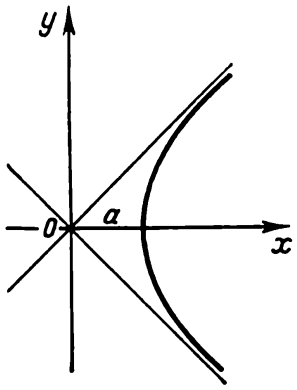


Fig. 55

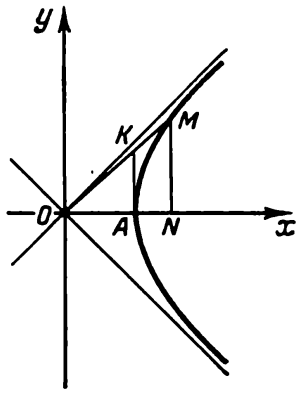


Fig. 56

des abscisses et relions, par le segment rectiligne OM, le point M à l'origine des coordonnées. Du sommet A de l'hyperbole, élevons la perpendiculaire AK à l'axe Ox jusqu'à l'intersection du point K avec le segment OM (fig. 56).

Montrer que $\frac{NM}{a}=\operatorname{sh} t$, $\frac{ON}{a}=\operatorname{ch} t$, $\frac{AK}{a}=\operatorname{th} t$.

Solution. On a

$$\frac{NM}{a}=\frac{y}{a}=\operatorname{sh} t,$$

$$\frac{ON}{a}=\frac{x}{a}=\operatorname{ch} t,$$

$$\frac{AK}{a}=\frac{NM}{ON}=\frac{\frac{NM}{a}}{\frac{ON}{a}}=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}=\operatorname{th} t.$$

1525. On donne la branche droite de l'hyperbole équilatère

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = a \cdot \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

En donnant à t une valeur déterminée, on obtient sur l'hyperbole le point M. Calculer l'aire du secteur hyperbolique limité par la branche de l'hyperbole, l'axe des abscisses et le segment OM (fig. 57).

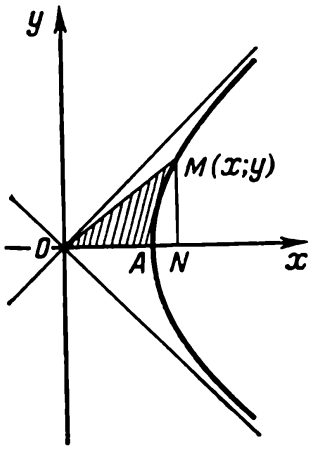


Fig. 57

Solution. On a

$$S = S_{ONM} - S_{ANM} = \frac{1}{2} xy - \int_a^x y\, dx.$$

Vu que $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, alors $dx = a \operatorname{sh} t\, dt$, d'où il vient

$$S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t - a^2 \int_0^t \operatorname{sh}^2 t\, dt = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t -$$

$$- \frac{a^2}{2} \int_0^t (\operatorname{ch} 2t - 1)\, dt = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sh} 2t + \frac{a^2}{2} t,$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{a^2 t}{2}.$$

Donc, $t = \frac{2S}{a^2}$. Ainsi, la variable t des fonctions hyperboliques peut être considérée comme étant le quotient de la division du double de l'aire du secteur hyperbolique OAM par le carré du demi-axe réel.

1526. Calculer les dérivées des fonctions :

a) $y=\ln\left(\operatorname{ch} x+\sqrt{\operatorname{ch}^2 x+1}\right)$; b) $y=5\operatorname{sh}^3\frac{x}{15}+3\operatorname{sh}^5\frac{x}{15}$;

c) $y=2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$; d) $y=\operatorname{th} x-\frac{2}{3}\operatorname{th}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x$;

e) $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)$; f) $y=\ln\operatorname{th}\frac{x^2}{4}$.

Réponse. a) $y'=\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x+1}}$; b) $y'=\operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\cdot\operatorname{ch}^3\frac{x}{15}$;

c) $y'=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$; d) $y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^6 x}$; e) $y'=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$; f) $y'=\frac{x}{\operatorname{sh}\frac{x^2}{2}}$.

1527. En quel point de la chaînette $y=\operatorname{ch} x$ la tangente forme avec l'axe des abscisses un angle $\alpha=\frac{\pi}{4}$?

Réponse. $M\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right);\ \sqrt{2}\right]$.

1528. Chercher l'extrémum de la fonction $y=\operatorname{ch}\frac{x}{2}-1$.

Réponse. Pour $x=0$, $y_{\min}=0$.

1529. Calculer les intégrales : a) $\int x^2\operatorname{ch} x\,dx$; b) $\int \operatorname{sh}^4 x\,dx$;

c) $\int\frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x-1}}\,dx$; d) $\int \operatorname{sh} x\cdot\sin x\,dx$;

e) $\int\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^3\frac{x}{2}}\,dx$; f) $\int \operatorname{sh}^3\frac{x}{3}\cdot\operatorname{ch}^2\frac{x}{3}\,dx$.

Réponse.

a) $x^2\operatorname{sh} x-2x\operatorname{ch} x+2\operatorname{sh} x+C$;

b) $\frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x-\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x+6x+C$; c) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ch} x-1}+C$;

d) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x\cdot\sin x-\operatorname{sh} x\cdot\cos x)+C$; e) $\operatorname{th}^2\frac{x}{2}+C$;

f) $\frac{3}{5}\operatorname{ch}^5\frac{x}{3}-\operatorname{ch}^3\frac{x}{3}+C$.

1530. Calculer les intégrales définies :

a) $\int\limits_0^{\ln(1+\sqrt{2})}\frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{sh}^2 x}}$; b) $\int\limits_0^{\ln 2}\operatorname{th}^2 x\,dx$; c) $\int\limits_0^{\ln 3} x\operatorname{ch} x\,dx$.

Réponse. a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\ln 2-0{,}6$; c) $\frac{2}{3}(2\ln 3-1)$.

1531. Exprimer $\operatorname{sh}(x-a)$ et $\operatorname{ch}(x-a)$ par les fonctions hyperboliques de variables indépendantes x et a.

Réponse. $\operatorname{sh}(x-a)=\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a-\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a$;

$$\operatorname{ch}(x-a)=\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}a-\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}a.$$

1532. Exprimer $\operatorname{th}(x+a)$ et $\operatorname{th}(x-a)$ par $\operatorname{th}x$ et $\operatorname{th}a$. Calculer $\operatorname{th}2x$.

Réponse. $\operatorname{th}(x+a)=\dfrac{\operatorname{th}x+\operatorname{th}a}{1+\operatorname{th}x\cdot\operatorname{th}a}$;

$$\operatorname{th}(x-a)=\frac{\operatorname{th}x-\operatorname{th}a}{1-\operatorname{th}x\cdot\operatorname{th}a};$$

$$\operatorname{th}2x=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}.$$

1533. Exprimer par $\operatorname{ch}x$ les fonctions hyperboliques de moitié de variable $\operatorname{sh}\frac{x}{2}$; $\operatorname{ch}\frac{x}{2}$; $\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

Réponse. $\operatorname{sh}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{2}}$;

$$\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+1}{2}};$$

$$\operatorname{th}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}.$$

1534. Mettre les expressions ci-dessous sous une forme telle qu'on puisse prendre commodément le logarithme

$$\operatorname{sh}x\pm\operatorname{sh}y,\quad \operatorname{ch}x\pm\operatorname{ch}y,\quad \operatorname{th}x\pm\operatorname{th}y.$$

Réponse. $2\operatorname{sh}\dfrac{x\pm y}{2}\cdot\operatorname{ch}\dfrac{x\mp y}{2}$; $2\operatorname{ch}\dfrac{x+y}{2}\cdot\operatorname{ch}\dfrac{x-y}{2}$;

$$2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{x-y}{2};\quad \frac{\operatorname{sh}(x\pm y)}{\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}y}.$$

1535. Exprimer $\operatorname{sh}x$ et $\operatorname{ch}x$ par $\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

Réponse. $\operatorname{sh}x=\dfrac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}$; $\operatorname{ch}x=\dfrac{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}$.

1536. Mettre les produits des fonctions hyperboliques

$$\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}y,\quad \operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}y,\quad \operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}y$$

sous forme de sommes.

Réponse. $\frac{1}{2}\cdot[\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y)]$;

$\frac{1}{2}\cdot[\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)]$;

$\frac{1}{2}\cdot[\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)]$.

1537. Calculer l'aire de la surface limitée par la courbe $y=\operatorname{sh} x$ et les droites $x=\ln 5$, $y=0$.

Réponse. $\frac{8}{5}$.

1538. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = a\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ situé entre les droites $x = 0$, $x = a$.

Réponse. 1,17 a.

1539. On donne sur la courbe

$$\begin{cases} x=a\operatorname{ch} t, \\ y=a\operatorname{sh} t \end{cases}$$

les points M et N correspondant aux valeurs $t = t_1$ et $t = t_2$ $(t_1 < t_2)$. Calculer l'aire du secteur OMN.

Réponse. $S=\frac{a^2}{2}(t_2-t_1)$.

1540. Quelle est la ligne définie par les équations

$$\begin{cases} x=\frac{a}{\operatorname{ch} t}, \\ y=b\cdot\operatorname{th} t, \end{cases}$$

si $a > 0$, $b > 0$?

Réponse. L'arc d'ellipse situé au-dessus de l'axe des abscisses.

1541. Quelle est la ligne définie par les équations

$$\begin{cases} x=\operatorname{ch}^2 t, \\ y=\operatorname{sh}^2 t\,? \end{cases}$$

Réponse. La demi-droite $x - y - 1 = 0$ située dans le Ier quadrant.

1542. On donne $\sin\alpha = \operatorname{th} t$. Exprimer $\cos\alpha$ et $\operatorname{tg}\alpha$ par t.

Réponse. $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\operatorname{ch} t}$; $\operatorname{tg}\alpha=\pm\operatorname{sh} t$.

1543. Simplifier l'expression

$$(\cos x\cdot\operatorname{ch} y+i\cdot\sin x\cdot\operatorname{sh} y)^2-(\cos x\cdot\operatorname{sh} y+i\sin x\cdot\cos y)^2.$$

Réponse. 1.

BeatriceGloria_personal library

1544. Simplifier l'expression

$$(x \cdot \operatorname{ch} t + y \cdot \operatorname{sh} t)^2 - (x \cdot \operatorname{sh} t + y \cdot \operatorname{ch} t)^2.$$

Réponse. $x^2 - y^2$.

1545. Démontrer les identités :

$$1)\ (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx\,;$$

$$2)\ \operatorname{ch} nx = \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2}\,;$$

$$3)\ \operatorname{sh} nx = \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2}.$$

1546. En utilisant les égalités

$$\operatorname{sh}^n x = \frac{(e^x - e^{-x})^n}{2^n}\,; \quad \operatorname{ch}^n x = \frac{(e^x + e^{-x})^n}{2^n},$$

montrer que

$$\operatorname{ch}^3 x = \frac{1}{4} \operatorname{ch} 3x + \frac{3}{4} \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16} \operatorname{sh} 5x - \frac{5}{16} \operatorname{sh} 3x + \frac{5}{8} \operatorname{sh} x.$$

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 5

Chapitre premier. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE 7

§ 1. Coordonnées rectangulaires et polaires 7
§ 2. Ligne droite 21
§ 3. Courbes du second degré (coniques) 37
§ 4. Transformation de coordonnées et réduction des équations des courbes du second degré (des coniques) 49
§ 5. Déterminants d'ordre 2 et 3 et systèmes d'équations linéaires à deux et trois inconnues 59

Chapitre II. ALGÈBRE VECTORIELLE 68

§ 1. Coordonnées rectangulaires dans l'espace. Problèmes fondamentaux 68
§ 2. Vecteurs. Opérations élémentaires sur les vecteurs 70
§ 3. Produits scalaire et vectoriel. Produit mixte 73

Chapitre III. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE 81

§ 1. Plans et droites 81
§ 2. Surfaces du second degré (quadriques) 99

Chapitre IV. ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE 110

§ 1. Notion de déterminant d'ordre n 110
§ 2. Transformations linéaires et matrices 117
§ 3. Réduction à la forme canonique des équations générales des courbes du second degré (des coniques) et des surfaces du second degré (des quadriques) 127
§ 4. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes 138
§ 5. Etude d'un système de m équations à n inconnues 142
§ 6. Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss 148
§ 7. Application de la méthode de Jordan-Gauss à la résolution des systèmes d'équations linéaires 152

Chapitre V. INTRODUCTION À L'ANALYSE 166

§ 1. Erreur absolue et erreur relative 166
§ 2. Fonction d'une variable indépendante 168
§ 3. Construction des courbes représentatives des fonctions 171
§ 4. Limites 173
§ 5. Comparaison des infiniment petits 183
§ 6. Continuité d'une fonction 185

Chapitre VI. CALCUL DIFFÉRENTIEL DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE 189

§ 1. Dérivées et différentielles 189
§ 2. Etude des fonctions 220
§ 3. Courbure d'une courbe plane 246
§ 4. Ordre de tangence des courbes planes 249
§ 5. Fonction vectorielle d'une variable scalaire et sa dérivée . . . 251
§ 6. Trièdre attaché à une courbe gauche. Courbure et torsion 256

Chapitre VII. CALCUL DIFFÉRENTIEL DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES 263

§ 1. Domaine d'existence d'une fonction. Lignes et surfaces de niveau 263
§ 2. Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables 265
§ 3. Plan tangent et normale à une surface 282
§ 4. Extrémum d'une fonction de deux variables indépendantes . . . 284

Chapitre VIII. Intégrales indéfinies 290

§ 1. Intégration directe. Changement de variable et intégration par parties 290
§ 2. Intégration des fractions rationnelles 307
§ 3. Intégration des fonctions irrationnelles élémentaires 324
§ 4. Intégration des fonctions trigonométriques 333
§ 5. Intégration des fonctions diverses 346

Chapitre IX. INTÉGRALES DÉFINIES 349

§ 1. Calcul des intégrales définies 349
§ 2. Intégrales impropres 356
§ 3. Calcul des aires des figures planes 363
§ 4. Calcul de la longueur d'un arc de courbe plane 365
§ 5. Calcul des volumes des corps 368
§ 6. Calcul de l'aire d'une surface de révolution 371
§ 7. Moments statiques et moments d'inertie des arcs et des figures plans 372
§ 8. Calcul des coordonnées du centre de gravité. Théorèmes de Guldin 376
§ 9. Calcul du travail et de la pression 379

Chapitre X. CERTAINES NOTIONS DE FONCTIONS HYPERBOLIQUES 386